NEWTO
ARITHM
CVM
LECCH
P. II.

6 cenn + 246 pp

IN ARITHMETICAM UNIVERSALEM ISAACI NEWTONI COMMENTARIA.

LIBER II.

PARS I. ET II.

ARITHMETICA
UNIVERSALIS
ISAACI NEWTONI

SIVE

DE COMPOSITIONE
ET RESOLUTIONE
ARITHMETICA

PERPETUIS COMMENTARIIS
ILLUSTRATA ET AUCTA

AUCTORE
P. ANTONIO LECCHI S. J.
IN UNIVERSITATE BRAYDENSI
MATHESEOS PROFESSORE.

MEDIOLANI MDCCLII.
EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROS.
APUD JOSEPH MARELLUM
SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.

LECTORI.

ANimadverti longo annorum experimento, ex quo lapidem hunc volvo erudiendæ in mathematicis diſciplinis ſtudioſæ juventutis, Adoleſcentes pleroſque Geometriam, Mechanicen, Staticen, reliquaſque Matheſeos amœniores partes avidè illas quidem arripere, iiſque ſe totos dedere: Algebram verò ita omnes prope faſtidiosè reſpuere, ut alii relato confeſtim pede ante hujus diſcendæ voluntatem abjiciant, quàm Algebram ipſam primo, ut ajunt, e limine ſalutaverint: alii verò aliquot poſt menſibus, ne dicam diebus verecundiùs caſtra deſerant: pauci admodum in incœpto perſiſtant. Quod eò mirabilius videri poteſt, cum id ſtudium, totaque ea res, quam Analyſim vocant, longè cæteris & ſtudiis, & artibus antecellat. An quòd Scriptorum ambagibus impediti, vel obſcuritate deterriti ſint? aut, quæ primò tradi ſolent, inſtitutiones, ab eorum cognitione, ſenſuque remotæ minùs delectent? an denique, quod veroſimilius puto, tanquam e littore proſpectent vaſtum maris æquor arandum?

Ut ut ſit, hæc ſeriùs cogitanti mihi occurrebat commodior tractandæ Analyſis methodus, quæ hoc præjudicio minimè laboraret. Ac primò, ut ne longiùs abeam, videbam illam jugi tenore continuatam præceptionum ſeriem pleriſque tædio eſſe, quoſdam etiam ſubvereri, ne

ſpe

ſpe inani tandiu luderentur. Non dubitavi itaque primò paululum inflectere methodum, quam a Scriptoribus acceperam, & præceptiones ſingulas certis intervallis disjungere, &, quem ex quaque fructùm referre poſſent Tirones in diſſolvendis problematis, ſtatim expromere. Nam, quamvis apud veteranos illos Analyſtas, quorum ingeniis profeceram, mirabilis ſit contextus præceptionum, ac ſemper reſpondeant extrema primis, media utriſque, omnia omnibus; tamen ſerò cognovi hæc, quæ viro probantur, junioribus ſatietatem afferre.

Cum belliſſimè hæc prima mihi tentamina procederent, meque incitarem ardentiùs, cœpi mecum ipſe meditari ſtudia, ac mores Adoleſcentum, quidve eorum vel phantaſiæ juvandæ, vel ingenio excitando conferret, ac mihimet inter ſcribendum ſæpius illud canere: vide ſis, ne hoc intempeſtivum ſit, illud duriuſculum, & fortaſſe dilatandum magis, hoc amputandum, & in aliud tempus rejiciendum. Nihil enim magis aberrat a ſcopo ſcriptor, quàm, ſi quibus ſcribat, non ſemper ob oculos habeat. *Altum alii teneant*, qui ſibi, ſuique ſimilibus placere volunt: *cur tantum mihi dexter abis, pete ſaxa Menætes*, hoc etiam mihi interdum jubebam, *littus ama, & lævas ſtringat, ſine, palmula cautes*. Ita porro eodem, quo cœperam, curſu pergebam.

Quæret fortaſſe quiſpiam, quì fieri potuit, ut hanc liberiorem tractandæ Analyſis methodum intra hæc commentariorum ſepta includerem. Nam, qui commentarios ſcribunt, ante tenentur adſtricti, quàm, quæ forma docendi eſſet aptior, re diu quæſita, eligere potuerint. Sed, ut veriſſimè dicam, quò id aſſequerer, non multa circuitione mihi opus fuit. Res erat in manibus. Tantùm monebo brevì, non ita rigidi commentatoris partes a me ſuſceptas, ut mihi ſemper verba præiret Newtonus, a cujus formula, ac velut præſcripto neſas arbitrarer diſcedere, atque aliò divertere, quò me diſcipulorum utilitas vocaret.

Ac primò, quandiu Newtonum Ducem habeo, illum ſequor, &, quemadmodum in ſuperiore libro, Newtoni textus integer ubique ſemper præponitur. Tum, quæ coarctavit, & peranguſtè referſit in ſua inſtitutione (nam, ut quiſque ſubtiliſſimus eſt, ita & adſtrictiſſimus eſſe ſolet) hæc mihi cura potior fuit, ut dilatarem Tironibus, atque explicarem. Dicam enim, quod ſentio: Bibliothecas mehercule plurium Analyſtarum (videte, quid homini tribuam) unus mihi videtur Arithmeticæ univerſalis libellus, ſi quis præceptionum fontes, & capita viderit, & inventionis acumine, & utilitatis ubertate ſuperare. Sed, quod etiam in Craſſo reprehendebat Tullius, tantus in eo præceptionum curſus eſt, & ſic evolat oratio, ut ejus vim, & incitationem Tirones aſpiciant, veſtigia, ingreſſumque non videant. Hæc me ratio impulit, ut regulas Reductionum Newtonianas minutatim perſequerer, quæſtiunculis opportunè inſertis, in quibus

bus singulas operationes quasi oculis subjicio, ne Tironi nondum exercitato hæsitandum foret in singulis, aut superiora præcepta singulis intervallis repetenda. Sexdecim, quæ a Newtono proponuntur problemata Arithmetica, sunt illa quidem selecta, sunt ingeniosissimè excogitata, & quæ præceptionum summam comprehendant brevì. Sed quædam ex ipsis paulo difficiliora, ac veluti acerbiora concoquere sub initium vix poterant studiosi. Præparatione adhibita emollienda fuerunt, ac multò seriùs tradenda. Quare in secundam partem totum ferè Diophantum traduximus quoad Problemata, quæ determinata vocant: quippe quæ a facilioribus ordiuntur, atque alia ex aliis inter se apta, & connexa sunt. Recentiorum etiam animadversionibus, Wallisii præsertim commentarios hosce locupletavi. Hoc enim liberiores, & solutiores sumus, quàm reliqui commentatores, quòd integram nobis fecimus potestatem ex omnium ingeniis, & inventis proficiendi; nam, si quid bene notatum a quopiam est, ecquis invideat Tirones juvari hoc etiam fructu alieni soli? Quamobrem & hanc ab ipso Newtono gratiam inibo, quòd eundem Ducem, ac veriùs Principem in hisce commentariis comitatum induxerim totius retroactæ ætatis Analystarum, & Geometrarum flore nobilissimo (quod in reliquis libris multò splendidiùs præstabimus): & Tirones hoc mihi acceptum referent, quòd, quæcunque essent ab aliis vel concinnè cogitata, vel planiore methodo tradita, non committerem ut hoc etiam solatio fraudarentur. Nihil ne tot sæculis, ajebat Tullius, summis ingeniis, maximis studiis explicatum putamus?

Quid, quòd severitatem Analysis quadam etiam hilaritate conspersimus, insertis epigrammatis græcis Euclidis, Metrodori, Ptolomæi, quæ in morem ænigmatum excitando ingenio olim proponebantur. Quo magis mirari soleo Græcorum hominum prudentiam, qui asperiorum etiam artium rudimenta poëticis lenociniis condiebant, neque pudor eos aliquis impediebat, quin ad hæc se demitterent, quæ doctrinam redolent, exercitationemque puerilem. Intelligebant nimirum viri omnium sagacissimi, ortus, progressionesque facultatum parvis hisce initiis pendere.

Data est insuper in hoc diligens opera, ut observationes modò has, modò illas, quas Analystis familiares esse oporteret, opportunè insererem in prima problematum serie. Sic hæc præceptionum partitio, tanquam rivorum a fonte deductio, sensim auget Analysim incremento maximo, labore nullo.

Dicet fortasse aliquis: consilium laudo; at, si hoc modo docere pergas, ut instituisti, in longum abibis; succrescent volumina; vide sis, ne *in vitium ducat culpæ fuga*.

Vereor, ne subarroganter hoc dicam: dicendum tamen, me hac admonitione ne tantulùm quidem commoveri; quasi verò exiguo curriculo amplissima doctrinarum spatia comprehendi

prehendi possint. An more Cascorum, quod Attico suo scribebat Tullius, brevi membrana, aut dedolatis e ligno angustis codicillis, mutua, uti olim epistolarum, ita nunc doctrinarum alloquia missitabimus? Non est ita sane. Abiit illud tempus, conversa ratio est; quæ dispersa quondam in artibus fuerant, collecta, & in unum corpus redacta: sic altæ, excultæque postmodum scientiæ. Quin potius imitemur Clavium illum nostrum, qui Geometriæ elementa, quæ vel vetustate perierant, vel erroribus scatebant, vel dispersa erant in scriptoribus, excitavit, emendavit, collegit inventione, ordine, & facilitate: quod certè præstare non potuisset brevi summula, aut, ut vocant, Epitome. Præclarè Tullius: non puto, inquit, tam expeditum fore præceptionis genus, quin non habeat aliquid moræ.

Sed, ut pauca dicam de aliis, qui posthac conscribentur, libris, quò fiat, ut ne quid desit curriculo analytico, non ea mihi mens est, ut, quemadmodum in hisce libris, singula ad vivum resecem; modicè posthac id faciam, aut etiam intra modum; nec tam insolens sum, qui non intelligam minimè paria exposcere adjumenta eos, qui vix pedibus ad insistendum idoneis gradiuntur, atque illos, quorum jam habiles lacerti, firmatæque vires. Amputanda postmodum erit crebrior explanatio, qua usi fuimus in prima institutione, & æquabili cursu progrediendum more institutoque Scriptorum.

Re-

Reliquum est, ut paucis commoneam eos Adolescentes, qui veriùs disciplinas devorare cuperent, quàm iisdem erudiri. Tantum abest, ut illi meam sententiam moveant, ut valde ego ipsis, quòd aliter senserint, pœnitendum putem. Ego enim fidenter jam vaticinor fore, ut in hisce summulis multò plus temporis, & operæ ponant, quàm, si non intermisso cursu, rectoque tramite, doctrinarum, qua latè patent, spatia liberè peragrarent. Quàm multa in angusta Epitome occurrunt, in quibus Tironi sæpius cespitandum, quasi libros sybillinos consuleret. Vidi hoc sæpius, & dolebam jacturam temporis: dies unus, alter, plures: hæret adhuc Tiro in una pagella suæ Epitomæ, neque saxo agendo quidquam proficit.

Sed fac te feliciter emensum intra paucos dies compendiolum hocce tuum: quid tum? An, quod sperabas, te consecutum putas? Tuo te periculo sapere nimium quantum docebit experientia. Quot libri postmodum consulendi tibi erunt, ut discas, quæ in tua illa Enceclopedia adhuc desiderantur. Retexenda sane tibi via omnis erit: ab uno exercitationis materies erit repetenda, ab altero calculi hujus, vel alterius expediendi ratio, & via. Ille te doceat necesse est unam partem, hic alteram artificii analytici. Et erit quispiam tam plumbeus, qui hanc putet esse methodum compendiariam Adolescentibus, quibus tanta concursatione opus est? Bibliothecam mehercule devorassem quo tempore vel hærendum mihi fuit

in

in una Epitome, vel huc atque illuc ſtips quærenda. Itaque ſuos illi compendiarios libros legant, qui volent, cum ſuis: nos inſtitutum tenebimus. Sed finis ſit; nam omni huic Præfatiunculæ propoſitum fuit, non ut exquiſitius quoddam docendi genus proferrem, a quo longè abſum, ſed ut laborem, & induſtriam, quam ſecutus certè ſum, ſi modò aſſecutus, omnibus probarem.

DE METHODO ANALYTICA.

PARS PRIMA.

CAPUT PRIMUM.

SYNOPSIS.

ANALYSIS methodus reſolutionis, Syntheſis methodus compoſitionis; hæc a datis ad quæſita progreditur, illa a quæſitis tanquam datis ad data tanquam quæſita regreditur. Per eadem reſolutionis veſtigia regreſſus ſyntheticus. Deductiones ad impoſſibile. Analyſis methodus inventionis, Syntheſis doctrinæ methodus. Utraque ab antiquis uſurpata. Quæ pars Geometriæ calculo analytico minimè tractabilis. Quid de utraque methodo ſenſerit Newtonus. Criterium problematis determinati ab indeterminato; ſpecimen artificii limitum conſtituendorum problemati indeterminato: exempla in hanc rem. Quid ſit æquatio, ejuſque conſideratio duplex, & rurſum æquationes, quædam ut media, quædam ut ultimæ concluſiones; hinc æquatio finalis pura, vel affecta; æquatio ordinata, ejuſque for-

forma simplicissima; formulæ generales æquationum; gradus æquationis; æquatio depressa. Quo artificio Problema datum algebraicè resolvatur.

PROPOSITIO I.

Analysim a Synthesi distinguere.

1. QUæ vulgò dici solet Algebra, græcè Analysis, aut Analytica dicitur, quippe quæ resolutionem, seu dissolutionem illius significet, quod sic componi intelligitur, ut casus postulaverit. Quod nomen, inquit Wallisius Cap. 1. T. 2., non incommodè attribui potest variis vulgaris Arithmeticæ operationibus, puta Subductioni, Divisioni, & Extractioni radicum; nam Subductio nil aliud est, quàm dissolutio illius, quod supponitur addendo componi, & Divisio, illius, quod multiplicando &c.; adeoque Additio, Multiplicatio, Constitutio potestatum, sunt operationes syntheticæ, seu compositoriæ: Subductio, Divisio, radicum Extractio, sunt operationes analyticæ, seu resolutoriæ; atque in aliis similiter.

Analysis methodus resolutionis.

2. Verùm hujusmodi operationes, quamquam sint revera analyticæ, non tamen illæ sunt, quas potissimum designat hæc appellatio; sed aliæ, quarum compositio est perplexior, atque intricatior, earumque resolutio propterea difficilior. Quod præclarè sub initium hujus operis explicat Newtonus hisce verbis: *Verùm Algebra maximè præcellit, quòd cùm in Arithmetica Quæstiones tantùm resolvantur progrediendo a datis ad quæsitas quantitates, hæc a quæsitis tanquam datis ad datas tanquam quæsitas quantitates plerumque regreditur; ut ad conclusionem aliquam, seu Æquationem, quocunque demum modo, perveniatur, ex qua quantitatem quæsitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata, quorum resolutiones ex Arithmetica sola frustra peterentur.*

3. Quamvis autem hæc sine exemplorum appositione obscuriùs fortasse differantur; tamen operæ pretium me facturum existimo, si hoc loco universaliorem utriusque methodi ideam in medium proferam, quam, cum ad problematum resolutiones ventum fuerit, identidem respiciant, ac consulant Tyrones, eamque singularium casuum comparatione pleniùs assequantur.

4. Omnes Mathematicæ probationes, vel a concessis ad quæsita, vel a quæsitis ad concessa progrediuntur. Quæ a concessis progrediuntur ad quæsita, compositiones appellantur; est enim synthesis, seu compositio, assumptio concessi per consequentia ad quæsiti finem, & comprehensionem, uti a Theone definitur, interprete Vieta: nimirum synthesis adhibetur, quotiescunque ex iis, quæ nobis nota sunt, eò usque componendo progredimur, donec in quæsiti cognitionem incidamus. Quæ verò a quæsitis progrediuntur ad concessa, sunt in duplici dif-

Synthesis methodus compositionis.

differentia; vel enim concessa ponunt, vel destruunt: quæ ponunt concessa, resolutiones vocantur; est enim analysis, seu resolutio, ex eodem Vieta, assumptio quæsiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum; nimirum in resolutione id quod quæritur, ut jam existens, & ut verum ponitur; atque hinc Analystis familiaris, ac trita vox in ipso aditu resolvendi problematis: *Finge datum, quod quæritur*; tum per ea, quæ deinceps consequuntur, eò usque progredimur resolvendo, donec ad verum concessum, hoc est, ad aliquod perveniamus jam cognitum, & exploratum: quo opere quæsitam conclusionem in proprias causas, per quas demonstratur, resolvimus. Veritates autem analyticè detectas facilè quidem est componere, regrediendo per eadem resolutionis vestigia; easque synthetica methodo tradere. Nam vicissim assumentes, quod postremò obtulit resolutio, & ordinantes secundùm naturam antecedentia, quæ illic consequentia erant, mutuaque illorum facta compositione, necesse est tandem, ut ad quæsiti finem perveniamus.

Regressus syntheticus.

5. At verò illæ demonstrationes, quæ a quæsitis ad concessa ita progrediuntur, ut eadem concessa destruant, deductiones ad impossibile nuncupantur. Nam deductio ad impossibile est assumptio ejus, quod quæsito contradicit, tanquam concessi per consequentia, ad id, quod vero concesso opponitur. Nimirum in deductione ad impossibile sumimus id, quod quæsito contradicit, idque supponentes progredimur, donec in aliquod absurdum incidamus, per quod, suppositione destructa, confirmetur id, quod a principio quærebatur.

Deductiones ad impossibile.

Habes ergo, in quo conveniat, in quo differat resolutio a deductione ad impossibile. Utraque ab incognito ad cognitum eodem progressionis ordine procedit; sed resolutio desinens in verum, concludit verum esse & quod supponitur: deductio verò ad impossibile desinens in falsum, demonstrat falsum esse & quod supponitur; & consequenter quæsitum verum esse.

6. Constat jam, quæ sit methodus analytica, quæve synthetica; & saltem rudi quadam minerva indicavimus, quo pacto veritates analyticè detectæ possint synthetica methodo demonstrari: quod uberiùs infra tractabitur, ubi de problematum constructione. Utramque methodum veteres Geometras adhibuisse in resolutione problematum testatur Pappus Alexandrinus, & veterum monumenta abundè confirmant: analysis ad inveniendum aptior, synthesis ad docendum, unde methodus doctrinæ vocatur. Hac de causa veteres Geometræ veritates analyticè inventas, synthetica methodo nobis tradiderunt; hanc tamen laudem Recentiores sibi jure optimo vindicare possunt, quòd usum analysis multò universaliorem reddiderint. Cum enim quantitatibus omnibus calculum applicuerint, totamque adeo Mathesim sive puram, sive mixtam, velut quamdam speciem Arith-

Analysis methodus inventionis.

Synthesis methodus doctrinæ.

Arithmetices effecerint, facultatem resolvendi cujusvis generis problemata ita quidem facilitarunt, ut nihil amplius in ea desiderari posse videatur.

SCHOLION.

Geometriæ pars calculo non tractabilis.

7. NOn omnia tamen, quæ ad Geometriam spectant, theoremata per calculum algebraicum erui, demonstrarique possunt. Quod perspicuum est ex ipsa elementari Geometria; nam quæ inibi de lineis perpendicularibus, de parallelismo linearum, de angulis, de congruentia, & similitudine triangulorum, aliisque nonnullis demonstrantur, per calculum algebraicum demonstrari minimè possunt; pendent enim hæc a situ linearum, quem ad se invicem habent: calculus verò algebraicus est calculus magnitudinum, non situs. Quamobrem jure Leibnitius in analysi Recentiorum adhuc desiderari monuit calculum situs a calculo magnitudinum planè diversum. Tyronem itaque, qui analysi addiscendæ operam daturus est, volo exercitatum demonstrationibus syntheticis, quales sunt Euclidis, & Geometrarum veterum: neque alia de causa veteri edicto vetitum est, ne quis ad Philosophiam accederet nisi Geometriæ peritus. Hanc esse veluti præparationem analysi addiscendæ abundè testatus est Isaacus Newtonus, quemadmodum eum dicere solitum refert Henricus Pambertonus in præfatione ad Philosophiam Newtonianam. Doluit sæpenumero vir summus, quòd, cum se studio mathematico totum tradidisset, prius ad Chartesii Geometriam, aliosque Scriptores algebraicos progressus fuisset, quàm elementa Euclidis attentè perlegeret; nec unquam probavit eorum consilium, qui Geometriæ methodo synthetica veterum prorsus neglecta, in solo calculo algebraico studium omne consumpsissent. Nam, ut alia omittam, absque omni Geometriæ præsidio, vix calculo algebraico locus esse potest; & præterea ii, qui ad altiora proficisci volent, experimento intelligent plura interdum occurrere problemata, quæ methodo veterum multò breviùs, & elegantiùs solvantur, quam per calculum analyticum, qui persæpe admodum perplexus, & operosus est.

Newtoni mens de utraque methodo.

Quamobrem methodus utraque pari studio excolenda est; nam una cum altera est ita connexa, ut, quæ analysis in lucem profert, ea synthesi demonstranda tradat; nec immeritò, referente eodem Pambertono, Newtonus in libro suo de Algebra interdum Arithmeticæ universalis titulum reprehendebat, affirmans Chartesium multò aptiùs suum de re eadem volumen dixisse Geometriam, ut sic ostenderet has computationes analyticas subsidia tantùm esse Geometris ad inveniendum.

Satìs multa dixisse videor in re, cujus tractatio constructionibus geometricis reservanda est.

PROPOSITIO II.

Quo criterio Problema determinatum ab indeterminato discerni possit.

8. Is est mens humana limitibus circumscripta, ut id, quod incognitum est, dumtaxat ex cognitis quibusdam conditionibus assequi possit. Quare proposito quovis problemate, hæc omnium prima est adhibenda diligentia, ut data a quæsitis rite distinguantur, hoc est, ut accuratè considerentur conditiones appositæ in ipso problemate, quæ exprimunt nobis relationes, quas incognitæ quantitates ad quantitates cognitas debent habere. His enim tanquam gradibus non modò ad incognitarum quantitatum cognitionem provehimur, verùm etiam primo statim aspectu cognoscimus, utrum Problema perfectè determinatum sit, an indeterminatum, & solutionum innumerabilium capax.

9. Hoc criterium nemo fortasse distinctiùs explicavit, quàm Joannes Pellius Anglus in Tractatu Londini edito 1668. sub titulo Introductionis in Algebram, in hæc verba, uti referuntur a Wallisio tom. 2. Alg. cap. 57.

Problema indeterminatum. *Si numerus datorum inter se independentium minor sit, quàm quæsitorum, quæstio plenè determinata non est, sed est solutionum innumerabilium capax. Si verò datorum, & quæsitorum numerus sit æqualis, quæstio perfectè determinatur: nimirum ad unam aliquam, vel determinatum solutionum numerum, puta ad duas, tres, pluresve,* Determinatum.

resve, pro numero dimensionum in æquatione congrua. Quòd si data plura sint, quàm quæsita, superflua sunt ea, quæ exsuperant, & talia forsan, ut cæteris sint contraria, nec cum eis possint consistere, adeoque Problema reddant impossibile. Redundans.

Hæc tria problematum genera consideravit etiam inter veteres Proclus, qui, sicut problema propriè dixit illud esse, quod est perfectè determinatum, sic vocavit problema deficiens, quod plenè determinatum non est, & problema excedens, sive redundans, quod plures habet conditiones, quàm quæ ad ejus determinationem requiruntur.

Quàm verè, quàm ingeniosè hujusmodi criterio natura cujusvis Problematis conspicua fiat, abundè constabit deinceps resolutione quæstionum, & observationibus, quas sæpe interseram ad hujus criterii normam exactas. Quo autem artificio quæstioni indeterminatæ possint tales annecti conditiones, & ea, quæ desunt, data ita pro arbitrio suppleri, ut, quamvis eam non absolutè determinent, certis tamen limitibus definiant, ut expositæ quæstionis natura postulat, hoc loco quàm brevissimè adumbrare conabor exemplis aliquot, quæstiunculisque facillimis ex eodem Pellio, & Wallisio desumptis. Limites constituti.

EXEM-

Exemplum I.

10. Proposita sit quæstio hujusmodi: quis sit numerus integer, qui possit absque fractione dividi per 3, 4, 5. Solutiones sunt innumeræ: nimirum numerus 60, hujusque multipli omnes. Numerum datorum inter se independentium minorem esse, quàm quæsitorum nemo non videt.

Si quæratur divisibilis per 2, 3, 4, & 5: numeri 2 mentio redundat planè, ut qui in 4 includitur.

Si petatur, quis numerus impar sit ita divisibilis: hæc nova conditio est planè incongrua, & reliquis inconsistens, cum numerus impar non possit per 2, aut 4 absque fractione dividi.

Limites. Sin petatur paulo restrictiùs, quis numerus quadratus sic possit dividi: hæc interposita conditio quæstionem intra certos limites adigit, sed non determinat. Sunt enim innumeri quadrati, qui sic possunt dividi: nimirum numerus 900, hujusque per quadratum multipli omnes.

Si quæratur denique, quis sit minimus numerus, qui sic possit dividi: determinatur quæstio ad numerum 60.

Exemplum II.

11. Pro determinando triangulo requiritur, ut data sint tria latera, puta a, b, c, aut quod his datis æquipolleat. Requiritur igitur, ut data tria sint, quò illud determinetur.

Si itaque data tantùm sint a, b latera, possum pro tertio c, latus pro libito assumere, quod cum datis a, b contineat triangulum; cum hac tamen conditione, quòd assumptum latus illud sit linea recta, quippe hoc innuitur ipso trianguli nomine; pariter quòd duabus datis rectis simul sumptis minor sit, sed major, quàm earum differentia, puta minor quàm $a+b$, sed major, quàm $a-b$: secus non conficietur triangulum, ut constat ex elementis. Sed intra hos limites quælibet assumi potest recta pro defectu determinationis tertiæ.

Sed si præter a, b, detur tertium aliquod *ab illis independens*, quo c determinetur, quæstio est perfectè determinata; ut, puta, si detur angulus ipsis a, b comprehensus; nam sic determinabuntur extrema puncta rectæ c, vel ratio quæsitæ c ad datam a, aut b, aut horum simile; quippe hinc determinabitur ipsius c longitudo; sed non ex ratione ipsius a ad b, quoniam hæc non est nova determinatio, sed in datis a, & b includitur.

Si præter datas a, b, requiratur, ut triangulum sit acutangulum, vel ut sit obtusangulum, hæc apposita conditio quæstionem quidem restringit, sed non determinat; nam varietas adhuc innumerabilium solutionum relinquitur pro longitudine lateris c.

Si requiratur, ut triangulum sit rectangulum, determinatur ad duos casus. Nam vel ille rectus

rectus angulus continebitur datis a, b: quo casu propter angulum datum dantur extrema puncta tertii lateris, adeoque ipsa c recta; vel datarum longior, puta, a erit trianguli quæsiti hypotenusa rectum subtendens angulum, quo casu tertium latus determinabitur; aut etiam si a, & b sint inter se æquales, determinatur ad casum unum: quippe tum necesse est, ut hæ contineant angulum illum rectum.

Si datis a, b requiratur, ut triangulum sit æquilaterum, tum vel res determinatur, si sint a, b inter se æquales, & utrivis c tertia; vel si sint a, b inæquales, casus est impossibilis.

Denique si requiratur, ut sit æquicrurum, sintque a, b inæquales, oportet c earum alteri æqualem sumi; sin æquales sint a, b, ea conditio est superflua, quippe quæ ipsis datis includitur.

PROPOSITIO III.

De Forma Æquationis.

12. *ÆQuationes, quæ sunt quantitatum aut sibi mutuò æqualium, aut simul nihilo æquipollentium congeries, duobus præcipuè modis considerandæ veniunt: vel ut ultimæ conclusiones, ad quas in problematis solvendis deventum est, vel ut media, quorum ope finales æquationes acquirendæ sunt. Prioris generis æquatio ex unica tantùm incognita quantitate cognitis involuta conflatur, modò problema sit definitum, & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ posterioris generis involvunt plures quantitates incognitas, quæ ideo debent inter se comparari, & ita connecti, ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova, cui inest unica, quam quærimus, incognita quantitas admista cognitis.*

Hoc unum inter alia munus est Algebræ, inquit Wallisius cap. 1. tom. 2., ut quantitas aliqua adhuc incognita, sed inquirenda, per Additiones, Subtractiones, Multiplicationes, Divisiones, aliasque operationes sic immutetur, donec æqualis fiat notæ cuidam quantitati, quam ei contraponunt, conferuntque: quam collationem vocant Æquationem.

13. Est autem æquatio, ut hìc sumitur, nihil aliud, quàm proportio æqualitatis inter duas quantitates, sive res variè denominatas. Nam, cum duæ res æquales dicuntur, quæ eamdem habent denominationem, est ea æqualitas, sive æquatio, vel falsa, ut cum dico æqualitas, sive æquationem esse inter 5, & 7, aut inter $5x$, & $7x$; vel certè identitas quædam ad inveniendum inutilis prorsus, ut cum dico æqualitatem esse, seu æquationem inter $4x$, & $4x$: necesse est ergo, ut æqualitas ad artificium analyticum pertinens sit inter duas res diversorum nominum. Quare vel ita definienda erit cum Wolfio, ut sit expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales, uti $2 \times 3 = 4 + 2$, vel cum aliis per rationem æqua- Æquatio.

qualitatis inter duos terminos diversimodè denominatos.

14. Æquationes autem duplici ratione considerari possunt, vel ut congeries quantitatum sibi mutuò æqualium, uti $x = p$; $xx = px + q$; vel ut congeries quantitatum simul nihilo æquipollentium, uti $x - p = 0$; $xx - px - q = 0$. Præstat enim interdum omnes æquationis terminos ad unam partem transferre, ipsamque æquationem considerare velut congeriem quantitatum, quæ simul nihilo sint æquales. Hanc terminorum omnium ad unam partem æquationis transpositionem primus invexit Harriotus, qui artificium hocce adhibet ut clavem pro reserandis, & detegendis æquationum compositarum mysteriis: sed de his plura alibi.

Duplex consideratio.

Quod attinet ad præsens institutum, æquationes hujusmodi duobus rursum modis considerandæ occurrunt, inquit Newtonus, vel ut *media, quorum ope finales æquationes acquirendæ sunt; vel ut ultimæ conclusiones, ad quas in problematis solvendis deventum est.* Nam in omni problemate determinato, quot sunt incognitæ, totidem inveniendæ æquationes, quæ statum quæstionis repræsentent, ac quantitates incognitas involvant plures, pauciores ve, prout natura problematis postulat. Ex hisce inventis æquationibus tanquam mediis gradus faciendus est ad ultimam conclusionem, ideft, ad æquationem finalem, nempe opera danda est, ut ex iis una deducatur æquatio, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam dumtaxat

Æquatio finalis.

taxat

taxat contineat incognitam quantitatem, cujus valor per solas quantitates cognitas expressus eliciatur.

15. *Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio ista variis plerumque modis transformanda est, donec evadat ea simplicissima quæ potest, atque etiam similis alicui ex sequentibus earum gradibus, in quibus* x *designat quantitatem quæsitam, ad cujus dimensiones termini, ut vides, ordinantur, &* p, q, r, s *alias quascunque quantitates, ex quibus determinatis & cognitis etiam* x *determinatur, & per methodos explicandas investigari potest.*

$x = p.$	$x - p = 0.$
$xx = px + q.$	*vel* $xx - px - q = 0.$
$x^3 = pxx + qx + r.$	$x^3 - pxx - qx - r = 0.$
$x^4 = px^3 + qxx + rx + s.$	$x^4 - px^3 - qxx - rx - s = 0.$
&c.	*&c.*

Ad horum normam itaque termini æquationum secundùm dimensiones incognitæ quantitatis in ordinem semper redigendi sunt, ita ut primum locum occupent, in quibus incognita quantitas est plurimarum dimensionum, instar x, xx, x^3, x^4, *& secundum locum, in quibus ea est una dimensione minor, instar* p, px, pxx, px^3, *& sic præterea. Et quod signa terminorum attinet, possunt ea omnibus modis se habere: imò & unus, vel plures ex intermediis terminis aliquando deesse. Sic* $x^3 * - bbx + b^3 = 0$, *vel* $x^3 = bbx - b^3$ *est æquatio tertii gradus;* $z^4 \begin{matrix} +a \\ -b \end{matrix} z^3 * \begin{matrix} +ab^3 \\ -b^4 \end{matrix} = 0$

æqua-

æquatio quarti. Nam gradus æquationum æstimantur ex maxima dimensione quantitatis incognitæ, nullo respectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò simplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorem quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$ *æquatio secundi gradus censenda est, siquidem ea in duas secundi gradus æquationes resolvi potest. Nam supposito* $xx = y$, *&* y *pro* xx *in æquatione illa perinde scripto, ejus vice prodibit* $yy = qy + s$, *æquatio secundi gradus; cujus ope cum* y *inventa fuerit, æquatio* $xx = y$ *secundi etiam gradus, dabit* x.

Aggreditur jam Auctor generalem methodum rite ordinandi cujuscunque gradus æquationes, quas finales vocant, easque ad formulas quasdam generales revocandi. Itaque, postquam problema ad æquationem finalem deductum est, forma oportet æquationis ejus consideretur. Nam, si quantitas incognita ad unicam tantùm dimensionem ascendat, valorem illius immediatè obtinebis, ac proinde æquatio finalis problema resolvet, nec ulteriùs progrediendum, nisi ejusdem problematis, cum fuerit geometricum, constructio desideretur. Ita, si æquatio ex aliquo problemate orta post debitas reductiones, hanc formam induerit $x = 3a - 2b$; problema jam erit resolutum, quia valor incognitæ x immediatè innotescit.

16.

16. Quòd si forma æquationis finalis fuerit ejusmodi, ut in illa quantitas incognita plures habeat dimensiones; in hoc casu æquatio poterit esse vel pura, vel affecta. Vocatur pura, cum in ea occurrit unica tantùm incognitæ potestas, sive sit quadratum, sive cubus, sive quævis alia potestas superior, ut $x^2 = ab$; $x^3 = abc$; $x^4 = a^3 b$ &c. Vocatur autem affecta, cum in illa duæ, aut plures incognitæ quantitatis potestates occurrunt, ut $x^2 + ax = b^2$; $x^3 + ax^2 = abc$; $x^3 + ax^2 - c^2 x = a^2 b$ &c.

Æquatio pura.

Vel affecta.

Cum æquatio, ad quam problema reducitur, est pura, problema rursus dicitur resolutum, quia extrahendo ex utraque parte æquationis radicem illius potestatis, ad quam ascendit incognita quantitas, valor ejus jam obtinetur. Ita $x^2 = ab$, fiet $x = \sqrt{ab}$; & $x^3 = abc$, fiet $x = \sqrt[3]{abc}$ &c.

At si æquatio, ad quam problema reductum est, fuerit affecta, tunc ad simpliciorem expressionem erit primò reducenda; deinde peculiares regulæ adhibendæ, uti gradus cujuslibet æquationis postulaverit.

17. Quamobrem, cum æquationes nihil aliud sint, quàm congeries quantitatum sibi mutuò æqualium, duæ in illis partes sunt distinguendæ, quarum una post legitimam reductionem terminos omnes continebit, in quibus reperitur quantitas incognita: altera omnes alios, qui ex solis cognitis coalescunt.

Æquationis forma simplicissima.

Ad æquationis formam illud etiam spectat, ut in uno æquationis membro, in quo omnes

 quan-

quantitates incognitæ reperiuntur, primo loco ſtatuatur incognita maximæ poteſtatis, quæ dicitur primus æquationis terminus: ſecundo loco incognita poteſtatis uno gradu inferioris, quæ dicitur ſecundus terminus; deinde omnes aliæ incognitæ gradatim decreſcentes, quæ conſtituunt tertium, quartum, quintum &c. terminum æquationis.

Sit æquatio inventa $bx^2+x^3=bx-ab+cd$, erit ordinata $x^3+bx^2-bx=cd-ab$. Pariter ſit æquatio $by^3-dy+y^4=abc+cy+mf$, erit ordinata $y^4+by^3-cy-dy=abc+mf$.

Si terminus maximæ poteſtatis multiplicatus exiſtat per aliam quantitatem, ſive litteralem, ſive numericam, omnes termini æquationis per illam dividi debent, ut ſimplex evadat. Sic $3x^3+6ax=ab$, dividendo per 3 utrumque membrum æquationis, erit $x^3+2ax=\frac{1}{3}ab$; ſimiliter ſi ſit æquatio $ax^2-2ax=abc$, dividendo per a, fit $x^2-2x=bc$.

Si terminus maximæ poteſtatis afficitur ſigno $-$, fieri debet per terminorum tranſpoſitionem poſitivus, ut mox in regulis reductionum declarabitur. Sic in æquatione $ax-x^2=ab-cf$, facta terminorum tranſpoſitione erit $x^2-ax=cf-ab$.

18. Omnes illi termini, in quibus inco-
Æquatio ordinata. gnita eamdem habet dimenſionem, ſtatuantur unus infra alium, quia inſtar unici termini conſiderantur; idemque fiat de quantitatibus cognitis, ſi plures ſint, ut in æquatione $x^3+ax^2-bx^2+cx-bx=abc$, erit ordina-

ta

ta $x^3\begin{smallmatrix}+ax^2+cx\\-bx^2-bx\end{smallmatrix}=abc$; quantitates ax^2-bx^2 ſtant ambæ loco ſecundi termini, & $cx-bx$ loco tertii termini. Similiter in æquatione

$$x^2\begin{matrix}-ax\\-bx\end{matrix}=\begin{matrix}+ac\\-bc\\+mf\end{matrix},$$

quantitates $ac-bc+mf$ unicum terminum conſtituunt.

Scribendi autem ſunt in hunc modum termini omnes, in quibus incognita eumdem dimenſionum numerum habet, quia ſcilicet contrahi poſſunt, & tametſi plures, ad unum tantum revocari; atque hinc æquatio quæcunque compoſita ad ſimpliciſſimam formam reducitur.

Sit æquatio $x^3\begin{smallmatrix}+ax^2-bx\\-bx^2+cx\end{smallmatrix}=abc$.

Quia in ſecundo termino quantitas incognita x^2 ſupponitur multiplicata per $a-b$, ponatur $a-b=p$, erit $ax^2-bx^2=px^2$. Rurſum quia in tertio termino $cx-bx$ quantitas incognita x ſupponitur multiplicata per $c-b$, ponatur $c-b=q$, erit $cx-bx=qx$. Denique ponendo $abc=r$, eadem æquatio transformabitur in hanc ſimpliciſſimam

$$x^3+px^2+qx=r,$$

$$\text{vel } x^3+px^2+qx-r=0,$$

quæ tranſpoſitio omnium terminorum æquationis ad unam partem quanti ſit uſus, infra conſtabit, *eamque*, inquit Walliſius cap. 31. Algeb., *ego exiſtimo maximam in Algebra myſteriorum patefactionem, quam præſens ætas tulit.*

19. Hinc unaquæque æquatio tot termi-

 nos

Termini, & gradus æquationis.

nos habere poteſt, quot indicat gradus æquationis auctus unitate una, & non plures: nimirum duos, ſi æquatio fuerit primi gradus, uti $x-p=0$, vel $x=p$, tres terminos, ſi ſecundi, quatuor ſi tertii, & ſic deinceps: puta, $xx-px-q=0$, & $x^3-pxx-qx-r=0$. *Gradus autem æquationum æſtimantur*, inquit Newtonus, *ex maxima dimenſione quantitatis incognitæ, nullo reſpectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos*.

20. Hac de cauſa nihil obſtat, quominus aliquando unus, vel plures ex terminis intermediis in æquatione deficiant, quemadmodum, ſi invenienda proponeretur inter a, & b media proportionalis, quam voco x, haberetur æquatio ſecundi gradus $x^2=ab$, ſive $x^2-ab=0$, quæ ſecundo termino caret. Et ſimiliter, ſi inter a, & b duæ mediæ proportionales eſſent inveniendæ, vocando primam illarum x, haberetur æquatio $x^3=a^2b$, ſive $x^3-a^2b=0$, quæ ſecundo, & tertio termino caret.

Terminos deficientes ſolent Analyſtæ ſtellulis, aut aſteriſmo notare, ut eorum defectus ſtatim incurrat in oculos; attamen, ſi quis terminus in æquatione deſit, minimè variatur ſequentium terminorum ordo, aut conditio. Sic in æquatione $x^3 * -bbx+b^3=0$, licet abſit ſecundus terminus, tamen bbx erit terminus æquationis tertius, & b^3 quartus. At cui uſui ſit hæc tam accurata notatio terminorum, ſuo loco conſtabit.

Termini deficientes.

21. Ob-

21. Obſervat præterea Newtonus ex defectu terminorum intermediorum hoc commodi derivari, ut æquatio plerumque multò ſimplicior fiat, & nonnunquam ad gradum inferiorem deprimi poſſit, ut ille oſtendit adjecto exemplo. Hoc artificio æquationes illæ unicè deprimi poſſunt, in quibus numeri dimenſionum, quas in terminis æquationis habet incognita quantitas, per unum, eumdemque numerum dividi poſſunt. Quod equidem cum accidit, deprimetur æquatio, ſumendo incognitam aliam, quæ adæquet eam poteſtatem incognitæ in æquatione contentæ, quam maximus eorum numerorum diviſor oſtendit. Exemplo res planior fiet: ſit æquatio $x^{12}+px^8-q=0$; quia maximus diviſor numerorum 12, & 8 eſt 4, fiat $x^4=y$, & deprimetur æquatio ad hanc aliam $y^3+py^2-q=0$. Hujus artificii uſum intelliges, ubi naturam æquationum compoſitarum explorabimus.

Æquatio depreſſa.

22. Habes jam, quorſum collimet methodus revocandi æquationem quamlibet finalem ad ſimpliciſſimam formam, nempe ut cujuſque gradus æquationes ad formulas quaſdam generales reduci poſſint, quas ſub initium Newtonus exhibet. Nam, ſi ſcribatur p pro quantitate cognita ſecundi termini, q pro quantitate cognita tertii termini, atque ita deinceps; omnes ſecundi gradus æquationes, nulla habita ſignorum, quibus termini afficiuntur, ratione, poterunt ſub hac formula generali exhiberi $x^2+px+q=0$; pariter æquationes omnes tertii

Formula generalis.

tii

tii gradus, non attendendo ad signa, quibus termini ipsi affici possunt, sub hac generali formula poterunt comprehendi, $x^3+px^2+qx+r=0$.

PROPOSITIO IV.

Synopsis artificii analytici, quo Problema datum algebraicè resolvitur.

I.

Denominatio.

23. Quantitates omnes tam datas, sive cognitas, quàm incognitas, sive quæsitas alphabeticis litteris ea quidem lege designabis, ut datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti litteris denominentur.

II.

Inventio æquationũ.

24. Progredere jam, perinde ac si resolutum esset problema, & datum, quod quæritur; tum singulas quæstionis conditiones ita excurras oportet, & relationes, quæ dantur inter cognitas, & incognitas, seu quæsitas quantitates, & ex utrisque simul tot elicies æquationes, quot sunt incognitæ. Nam, si problema determinatum sit, numerus quæsitorum adæquare debet numerum datorum ex Prop. II. Quare in eo tot oportet conditiones apponere, quot incognitæ quantitates occurrunt. Cum autem æquationes inveniantur per ipsas conditiones in problemate, ita quidem, ut unaquæque conditio suam nobis præbeat æquationem, illud apertè consequitur in problemate determi-

mi-

minato tot æquationes quæri oportere, quot incognitæ quantitates fuerint assumptæ.

Quòd si percursis diligenter singulis problematis conditionibus, numerus æquationum ab incognitarum numero deficit; indicio id erit, problema non esse penitus determinatum, nec omnes habere conditiones ad determinationem ejus necessarias; atque adeo unam, vel plures quæsitarum, pro arbitrio assumi posse, ut declaravimus Prop. II.

III.

Inventio æquationis finalis.

25. Æquationes inventæ debent inter se comparari, & ita connecti, ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam contineat incognitam quantitatem admixtam cognitis. Quod quidem obtinebitur exterminando reliquas quantitates incognitas per æqualitatem, aut substitutionem valorum, ut infra explicabitur.

IV.

Reductio.

26. Cum autem in æquatione finali quantitas incognita cognitis sit permixta, hæc primò ad simpliciorem formam revocanda; dein ita reducenda est, ut ex una parte æquationis tantùm habeatur quantitas incognita, ex altera verò merè cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, hac semper lege servata, ut

in

in omni transformatione æqualitas perpetuò retineatur.

Hæc ad juvandam Tyronum memoriam brevissimè complexi sumus artificii analytici summa capita, quæ multò accuratiùs deinde explicat Newtonus, orditurque a forma æquationis, in quam transformanda est æquatio finalis, ut evadat ea simplicissima, quæ potest esse; tum regulas reductionum latè persequitur. Quamvis verò, dum adhuc abstractè traduntur, hæc vix perfectè comprehendere Tyrones possint; in problematum tamen resolutione, usu ipso, atque exercitatione assequentur, atque intelligent, quorsum spectent tot Regulæ, quid sibi velint tot transformationum modi, quis finis, & fructus.

27. *Atque hæ sunt conclusiones, ad quas problemata deduci debent; sed, antequam eorum resolutionem aggrediar, opus erit, ut modos transformandi, & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes, abstractè doceam; Æquationis autem solitariæ reductionem in sequentibus regulis complectar.*

Æquatio finalis, quæ singulas problematis conditiones includens, unicam contineat incognitam quantitatem, ut plurimum non statim apta est solvendæ propositæ quæstioni; sed magna interdum præparatione indiget, ut quantitates cognitæ ab incognita separentur, cujus valor per solas quantitates cognitas expressus omnino innotescat. Itaque primò solitariæ æquationis reductio traditur; tum duarum, pluriumve æquationum in unicam finalem transformatio.

CAPUT II.

Regulæ Reductionum.

28. Ars analytica, quam trito jam vocabulo artem inveniendi vocant, eò collimat, ut certas aliquot a cognitione secretas quantitates exploret, & tandem, inter cognitas & incognitas quantitates æquatione comperta, deprehendat, atque demonstret; venaticæ canis instar, inquit appositè P. Clavius in proem. de Alg. præstantia, quæ, si quando diuturna venatione fatigata, & fame exagitata delitescentem feram subodorata fuerit, tandiu oculis, tandiu odora narium sagacitate scrutatur singula, donec comprehensam, dentibusque hærentem prædam domino sistat. Haud secus venatrix hæc facultas quantitates incognitas perinde ac cognitas nunc addendo, nunc dividendo, nunc multiplicando, ac reliquis reductionum regulis, suspenso velut vestigio pertentat, & tandiu latitantis quantitatis tenebras explorat omnes, ac vestigat, donec eò progrediatur, ut æquationis ope, quam finalem vocant, incognitam quantitatem arripiat, & in lucem proferat. Hoc itaque præstantissimum artis analyticæ opificium a Newtono sequen-

quentibus Regulis expositum, & brevi commentatione a me explanatum, sic tradere aggredior.

SYNOPSIS.

29. ÆQuationum legitima reductio notissimis quatuor operationibus, additione, subtractione, multiplicatione, & divisione, quibus æqualitas nunquam destrui facilè ostenditur. Fractionum reductio, ut rite æquatio ordinari possit secundùm dimensiones unius incognitæ. Ad reductionem radicalium formatio potestatum adhibenda, ut ad rationales revocentur: quandoque etiam, si plures occurrant radicales, substitutione utendum. Maxima incognitæ quantitatis dimensio, si cognitæ quantitati admixta sit, ab eadem separanda est, vel divisione, vel multiplicatione.

REGULA I.

30. *SI quæ sunt quantitates, quæ se mutuò destruere, vel per Additionem, aut Subductionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt.*

Veluti si habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$, *aufer utrinque* $2x$, *& adde* $3a$; *proditque* $5b = 8a + x$. *Atque ita* $\frac{2ab+bx}{a} - b = a + b$, *delendo æquipollentes* $\frac{2ab}{a} - b = b$, *evadit* $\frac{bx}{a} = a$

Ad

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis, quæ fieri solet per translationem ad contrarias partes cum signo contrario. Ut si habita æquatione $5b = 8a + x$ *desideretur* x: *aufer utrinque* $8a$, *vel, quod eòdem recidit, transfer* $8a$ *ad contrarias partes cum signo mutato; & prodibit* $5b - 8a = x$. *Eodem modo si habeatur* $aa - 3ay = ab - bb + by$, *ac desideretur* y, *transpone* $-3ay$, *&* $ab - bb$, *eò ut ex una parte consistant termini multiplicati per* y, *& ex altera reliqui termini; & prodibit* $aa - ab + bb = 3ay + by$: *unde* y *elicietur per Reg. V. sequentem, dividendo scilicet utramque partem per* $3a + b$, *prodibit enim* $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. *Atque ita æquatio* $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$ *per debitam transpositionem, & ordinationem evadit* $x^3 = \begin{matrix} aa \\ -3ab \end{matrix} x \begin{matrix} -a^3 \\ +abb \end{matrix}$, *vel* $x^3 \begin{matrix} -aa \\ +3ab \end{matrix} x \begin{matrix} +a^3 \\ -abb \end{matrix} = 0$.

De Reductione per additionem, vel per subtractionem.

31. TRansspositio, quam veteres Antithesim vocabant, docet transferre quantitatem aliquam ab una æquationis parte ad aliam sub signo contrario, quin æqualitas labefactetur. Exemplo sit æquatio $x + 8a = 5b$, vel $x - 8a = 5b$, & quæratur valor incognitæ x, erit transponendo in primo casu $x = 5b - 8a$, in secundo, $x = 5b + 8a$. Dico autem hac trans- Æqualitas in transponendo.

transpoſitione non deſtrui æqualitatem; ſi enim æqualibus addantur, aut ſubtrahantur æqualia, quæ fiunt, erunt æqualia; atqui, quoties termini alicujus quantitatis ab una æquationis parte ad aliam transferuntur ſub ſigno contrario, toties æqualibus adduntur, aut ſubtrahuntur æqualia. Ergo manet æqualitas.

Itaque hæc reductio perficitur additione, vel ſubtractione terminorum, qui ad hanc, vel illam æquationis partem ſunt transferendi: nimirum additione, quotieſcunque termini tranſferendi afficiuntur ſigno $-$, & viciſſim ſubtractione, cum iidem termini reperiuntur ſigno $+$ affecti. Nam in adducto exemplo, ut eliciatur valor incognitæ x ab æquatione $x+8a=5b$, ſubtrahe utrinque $8a$: erit $x+8a-8a=5b-8a$; & delendo terminos æquipollentes, fiet $x=5b-8a$; vel ſi deſideretur x ab æquatione $x-8a=5b$, adde utrinque $8a$: erit $x-8a+8a=5b+8a$, & deletis quantitatibus, quæ ſe mutuò deſtruunt, fiet $x=5b+8a$.

Ex quibus jam conſtat tranſpoſitionem iſtam terminorum multò ſimpliciùs fieri, ſi nulla inſtituatur additio, vel ſubtractio, ſed dumtaxat ipſi termini mutatis ſignis ad alternas partes
Regula generalis.
æquationis transferantur; atque adeo hæc Regula huc tandem recidit: *Quidquid tranſponitur, mutat ſignum*.

Illud etiam conſequitur, quòd, quotieſcunque in utraque parte æquationis unus idemque terminus occurrit eodem ſigno affectus, utrinque delendus ſit.

Sic æquatio $xx+ax+cx=ax+aa$, deleto utrinque ax, reducetur ad hanc $xx+cx=aa$.

REGULA II.

32. *Si qua compareat quantitas, per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel ſi per eamdem quantitatem omnes dividantur, debent omnes per illam multiplicari.*

Sic habito $15bb=24ab+3bx$, *divide terminos omnes per* b, *& fit* $15b=24a+3x$; *deinde per* 3, *& fit* $5b=8a+x$. *Vel habito* $\frac{b^3}{ac}-\frac{bbx}{cc}=\frac{xx}{c}$ *multiplica omnes per* c, *& prodit* $\frac{b^3}{a}-\frac{bbx}{c}=xx$.

De reductione per multiplicationem, aut per diviſionem.

33. Demonſtratio pendet a notiſſimo axiomate, quòd, ſi æqualia vel multiplicentur, vel dividantur per eamdem quantitatem, hinc facta, inde quoti æqualitatem ſervabunt.
Æqualitas in dividendo, & multiplicando.

Scholion.

In æquationibus altiorum graduum, quas vocant affectas, quæque inſtar exempli in rem præ-

præsentem afferuntur in medium a Newtono, fieri nequit totalis incognitæ a cognitis separatio, nisi illæ per regulas alibi tradendas resolvantur.

REGULA III.

34. *Si qua sit fractio irreducibilis, in cujus denominatore reperiatur littera illa, ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, omnes æquationis termini per istum denominatorem, aut per aliquem divisorem ejus multiplicandi sunt.*

Ut si æquatio $\frac{ax}{a-x}+b=x$ *secundùm* x *ordinanda sit, multiplicentur omnes ejus termini per* $a-x$ *denominatorem fractionis* $\frac{ax}{a-x}$, *siquidem* x *inibi reperiatur; & prodit* $ax+ab-bx=ax-xx$, *seu* $ab-bx=-xx$; *& facta utriusque partis translatione* $xx=bx-ab$. *Atque ita si habeatur* $\frac{a^3-abb}{2cy-cc}-y-c$, *terminique juxta* y *ordinandi sint, multiplicentur per denominatorem* $2cy-cc$, *vel saltem per divisorem* $2y-c$ *quo* y *tollatur e denominatore; & exurget* $\frac{a^3-abb}{c}=2yy-3cy+cc$, *& ordinando* $\frac{a^3-abb}{c}-cc+3cy=2yy$. *Ad eundem modum* $\frac{aa}{x}-a=x$ *multiplicando per* x, *evadit* $aa-ax=xx$, *&* $\frac{aabb}{cxx}=\frac{xx}{a+b-x}$ *multiplicando primò per* xx, *dein per* $a+b-x$ *evadit* $\frac{a^3bb+aab^3-aabbx}{c}=x^4$.

De Reductione Fractionum.

Ut quantitas incognita faciliùs eliciatur, docuit Newton prop. 3. n. 15. æquationem finalem ita transformandam esse, donec evadat simplicissima, quæ potest esse, & similis alicui ex formulis ab eodem propositis n. 12. in quibus termini ordinantur juxta dimensiones incognitæ *x*; cum verò fractiones irreducibiles huic ordinationi obessent, tradit methodum, qua & illæ auferri, reducique possint. Ordinatio æquationis.

REGULA IV.

35. *Si cui surdæ quantitati irreducibili littera illa involvatur, ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum signis mutatis transferendi sunt, & utraque pars æquationis in se* semel *multiplicanda, si radix* quadratica *sit, vel* bis, *si sit* cubica *&c.*

Sic ad ordinandum juxta x *æquationem* $\sqrt{aa-ax}+a=x$, *transferatur* a *ad alteras partes; fitque* $\sqrt{aa-ax}=x-a$; *& quadratis partibus*, $aa-ax=xx-2ax+aa$, *seu* $o=xx-ax$, *hoc est* $x=a$. *Sic etiam* $\sqrt[3]{:aax+2axx-x^3}-a+x=o$, *transponen-*

nendo $-a+x$ *evadit* $\sqrt[3]{aax+2axx-x^3}=a-x$; *& partibus cubicè multiplicatis*, $aax+2axx-x^3=a^3-3aax+3axx-x^3$, *ſeu* $xx=4ax-aa$. *Et ſic* $y=\sqrt{ay+yy}-a\sqrt{ay-yy}$ *quadratis partibus evadit* $yy=ay+yy-a\sqrt{ay-yy}$; *& terminis debitè tranſpoſitis* $ay=a\sqrt{ay-yy}$ *ſeu* $y=\sqrt{ay-yy}$; *& partibus iterum quadratis* $yy=ay-yy$; *& tranſponendo denuo*, $2yy=ay$, *ſive* $2y=a$.

De Reductione incommenſurabilium.

IN reſolutione problematum occurrunt quandoque æquationes quædam, in quibus quantitates ſurdæ, ſeu radicales continentur. Hæc Regula docet, quo artificio æquatio ita reducenda ſit, ut quantitates illæ evadant rationales, & commenſurabiles, in hunc modum. Transferantur ad partem unam æquationis quantitates omnes rationales, & relinquatur in parte altera ſola quantitas radicalis; tum elevetur utraque pars æquationis ad eam poteſtatem, quæ eſt propria ſedes illius quantitatis radicalis; & ſic nova habebitur æquatio, in qua nulla radicalis quantitas occurret. Sit $\sqrt{aa-ax}+a=x$ æquatio ex reſolutione alicujus problematis orta, & oporteat in ea quantitatem radicalem complexam $\sqrt{aa-ax}$ commenſurabilem reddere. Transferatur per Reg. I. ad alteram partem æquationis quantitas commenſurabilis a, ita ut maneat ſola quantitas radicalis in una parte: erit igitur $\sqrt{aa-ax}=x-a$; deinde, quia ſedes propria illius quantitatis radicalis eſt quadratum, ſive ſecunda poteſtas, elevetur utraque pars æquationis ad quadratum, & habebitur nova æquatio libera ab omni quantitate incommenſurabili, $aa-ax=xx-2ax+aa$; & deletis terminis, qui ſe mutuò deſtruunt, erit per Reg. I. $o=xx-ax$; & rurſus tranſponendo fiet $ax=xx$; & per Reg. II. dividendo terminos æquationis utrinque per x, erit $x=a$; idemque præſtandum in reliquis exemplis.

SCHOLION.

36. QUòd ſi plures in æquatione ſint quantitates radicales, ope ſubſtitutionis hæc reductio multò commodior evadet in hunc modum: ſit $\sqrt{ax}=\sqrt{bx}+c$ æquatio ex aliquo problemate orta: ponatur $\sqrt{ax}=p$, & $\sqrt{bx}=q$: erit $ax=p^2$, & $bx=q^2$. Subſtituantur in æquatione propoſita loco quantitatum radicalium aſſumpti valores, & habebitur loco ejus hæc alia $p=q+c$. Elevetur utraque pars hujus æquationis ad ſecundam poteſtatem, quæ eſt propria ſedes utriuſque quantitatis radicalis, & fiet $p^2=q^2+2qc+c^2$. Erat autem $p^2=ax$, & $q^2=bx$: itaque ſubrogatis rurſus hiſce valoribus, fiet $ax=bx+2qc+c^2$, hoc eſt, $ax-bx-c^2=2qc$. Elevetur iterum utraque Subſtitutio.

 pars

pars hujus æquationis ad quadratum, & habebitur $a^2x^2 - 2abx^2 + b^2x^2 - 2ac^2x + 2bc^2x + c^4 = 4q^2c^2$, in qua, ſi ſubſtituatur loco q^2 valor ejus bx, orietur tandem æquatio libera ab omni quantitate radicali.

Sit inſuper $\sqrt{ax} + a = \sqrt[3]{3a^2x}$ æquatio ex aliquo problemate derivata: ponatur $\sqrt{ax} = p$, & $\sqrt[3]{3a^2x} = q$: erit ergo $ax = p^2$, & $3a^2x = q^3$. Subſtituantur in æquatione propoſita loco quantitatum radicalium aſſumpti earum valores, & habebitur loco ejus hæc alia $p + a = q$. Elevetur utraque pars hujus æquationis ad cubum, ſive tertiam poteſtatem, & fiet $p^3 + 3p^2a + 3pa^2 + a^3 = q^3$. Erat autem $p^2 = ax$, & $q^3 = 3a^2x$: itaque ſubrogatis hiſce valoribus, erit $pax + 3a^2x + 3pa^2 + a^3 = 3a^2x$; hoc eſt, $pax + 3pa^2 = -a^3$. Elevetur rurſus æquationis hujus utraque pars ad quadratum, & habebitur $p^2a^2x^2 + 6p^2a^3x + 9p^2a^4 = a^6$, in qua, ſi loco p^2 ſubſtituatur valor ejus ax, orietur tandem æquatio $x^3 + 6ax^2 + 9a^2x = a^3$, in qua nulla exiſtit quantitas radicalis.

REGULA V.

37. *Terminis ſecundùm dimenſiones litteræ alicujus ope præcedentium Regularum diſpoſitis, ſi maxima ejuſdem litteræ dimenſio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eamdem dividi.*

Sic $2y = a$ *dividendo per* 2, *evadit* $y = \frac{1}{2}a$.

Et $\frac{bx}{a} = a$ *dividendo per* $\frac{b}{a}$, *evadit* $x = \frac{aa}{b}$.

Et $\begin{array}{l}2ac\\-cc\end{array} x^3 \begin{array}{l}+a^3\\+aac\end{array} xx \begin{array}{l}-2a^3c\\+aacc\end{array} x - a^3cc = 0$

dividendo per $2ac - cc$, *evadit* $x^3 + \frac{\begin{array}{l}a^3\\aac\end{array}}{2ac} xx$

$\frac{\begin{array}{l}-2a^3c\\+aacc\end{array} x - a^3cc}{-cc} = 0$, *ſive* $x^3 + \frac{a^3 + aac}{2ac - cc} xx$

$-aax - \frac{a^3c}{2a - cc} = 0$.

De Reductione per diviſionem, aut multiplicationem.

Diviſione, & multiplicatione utimur, ut quantitas incognita admixta cognitis ſeparetur. Quoties ergo in termino aliquo æquationis quantitas incognita eſt admixta cognitis per multiplicationem, ſeparabit eas Analyſta per diviſionem, quæ multiplicationi opponitur, nimirum dividendo æquationis terminos omnes per quantitatem cognitam: ſic $2y = a$, dividendo per 2, evadit $y = \frac{1}{2}a$. Quoties verò quantitas incognita eſt admiſta cognitis in aliquo termino per diviſionem ad modum fractionis, ſeparabit eas per multiplicationem, quæ opponitur diviſioni, ſcilicet multiplicando terminos omnes æquationis per denominatorem fractionis. Quare, ſi incidas in hanc æquationem $\frac{x}{c} = b$, multiplicando utrinque per deno-

Separatio quantitatis cognitæ ab incognita.

nominatorem c, erit $x = bc$; atque ita $\frac{bx}{a} = a$, multiplicando utrinque per a, erit $bx = aa$; & dividendo utrinque per b, fiet $x = \frac{aa}{b}$; pariterque, ut in iſta æquatione $\frac{ab}{x} = a + x$ poſſit incognita x a cognitis ſeparari, multiplicanda eſt pars utraque æquationis per x, & evadet $ab = ax + x^2$.

SCHOLION.

38. IN æquationibus altioribus affectis, ſi maxima incognitæ poteſtas, quæ in æquatione continetur, cum nullà cognitarum conjungitur, ut in ultima æquatione $ab = ax + x^2$, tunc incognita a cognitis cenſenda eſt ſufficienter ſeparata, donec æquatio per regulas tradendas reſolvatur.

REGULA VI.

39. *Aliquando Reductio inſtitui poteſt dividendo æquationem per compoſitam aliquam quantitatem.*

Sic enim $y^3 = \begin{matrix}-2c\\+b\end{matrix}\, yy + 3bcy - bbc$ *ad hanc* $yy = -2cy + bc$ *reducitur transferendo terminos omnes ad eaſdem partes hoc modo:* $y^3 \begin{matrix}+2c\\-b\end{matrix}\, yy - 3bcy + bbc = 0$, *& dividendo*

do per $y - b$, *ut in capite de diviſione oſtenſum eſt; prodibit enim* $yy + 2cy - bc = 0$. *Aſt hujuſmodi diviſorum inventio difficilis eſt, & eam prius docuimus.*

Hanc diviſorum inventionem multò aptiùs transferendam cenſui ad Analyſim æquationum altiorum graduum, de qua alibi agendum erit.

CAPUT III.

40. ORdo Newtonianæ doctrinæ poſtularet, ut reliquas Regulas reductionum continuò explicarem; at vereor, ne præceptorum copia & tædium Tyronibus afferat, & eorum memoriam obruat. Quamobrem præceptis interſeram problemata, variaſque obſervationes. Volo autem Analyſis ſtudioſum hoc loco moneri, ut ne deſpondeat animo, ſi, quæ ſuperioribus Propoſitionibus, & Regulis continentur, ſaltem pleraque, obſcuriora fortaſſe viſa illi fuerint. Hoc enim uſuvenire ſemper ſolet, ut quæ abſtractè traduntur, ea vix prima vice a Tyronibus arripiantur, niſi eadem viderint in praxi applicata. Ordiar autem a ſimplicioribus; totiuſque artificii analytici progreſſum, cujus Synopſim expoſui Prop. IV., in ſingulis quæſtionibus pedetentim enucleabo.

SYNOPSIS.

FRactiones utcunque plures ab æquatione expeditiùs tollere. Regula Proportionum fæpius adhibenda in problematis, ut incognitæ quantitates denominentur. Utilitas calculi litteralis, & inde universalitas resolutionis. Datorum a se mutuò non dependentium criterium. Status quæstionis sermone analytico designatus. Quantùm Algebra Arithmeticæ præstet. Regulæ Arithmeticæ ab æquationibus derivatæ, & hinc theoremata. Quomodo particulare problema ad eam universalitatem transferatur, ut casus omnes comprehendat. Reductio per extractionem radicis. Methodus complendi potestates imperfectas, & resolvendi æquationes secundi gradus. Æquationis quadraticæ affectæ formulæ quatuor, & earum resolutio universalior.

PROBLEMA I.

41. INvenire numerum, ita ut, dimidio ipsius, & tertia parte ab eo sublatis, reliquus numerus sit 7.

Finge datum, quod quæritur, ac pro quæsita quantitate pone x.

Cùm autem unica quantitas incognita quærenda sit, unica pariter æquatio invenienda ex datis conditionibus problematis. Quoniam ergo quantitas x posita est æqualis toti numero incognito, qui quæritur, erit $\frac{1}{2}x$ æqualis dimidio totius numeri quæsiti, & $\frac{1}{3}x$ tertiæ parti ejusdem. At unica problematis conditio postulat, ut, dimidio, & tertia parte ex toto numero incognito subtractis, reliquus numerus sit 7: habes ergo æquationem, quæ omnes problematis conditiones includit, nimirum

$$x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}x = 7.$$

Hæc ita reducenda est, ut ex una parte æquationis unicè habeatur quantitas incognita x, & ex altera quantitates cognitæ deprehendantur. Itaque reductio primò per additionem præstanda est per Reg. I., ut termini, qui coalescere possunt, minuantur; reductisque fractionibus ad eumdem denominatorem, factaque additione, multò simplicior prodibit æquatio

$$x - \tfrac{5}{6}x = 7$$

Tum per Reg. II. reductio per multiplicationem instituenda, ut fractio tollatur. Multiplicentur ergo omnes termini æquationis per denominatorem 6: fiet

$$6x - 5x = 42$$

deletisque terminis, qui se mutuò destruunt, prodibit tandem æquatio, quæ problema resolvit

$$x = 42.$$

Jam verò, si hujus numeri 42 inventi sumatur $\frac{1}{2}$, nimirum 21, & $\frac{1}{3}$, videlicet 14; atque hæ partes, ut jubet problema, ex ipso numero 42 detrahantur, fit reliquus numerus 7: quod in quæstione proposita desiderabatur.

PROBLEMA II.

42. INvenire numerum, cujus pars dimidia cum tertia, & quarta numerum quæsitum unitate superet.

Esto x numerus quæsitus, qui conditionibus problematis satisfacit.

Ex conditione problematis $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x$ unitate superant numerum integrum quæsitum x: quare, si huic adjiciatur unitas, æquabitur fractionibus simul sumptis;

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=x+1$$

Revocentur fractiones ad communem denominatorem.

$$\frac{12x+8x+6x}{24}=x+1$$

hoc est, $\frac{26x}{24}=x+1$.

Per Reg. V. multiplicetur utrinque æquatio per 24, ut tollatur fractio

$$26x=24x+24.$$

Transferatur $24x$ ab una parte æquationis ad aliam sub signo contrario, ut jubet Reg. I.; vel, quod eodem recidit, utrinque subtrahatur $24x$

$$26x-24x=24$$

hoc est, $2x=24$.

Per Reg. V. dividatur utrinque æquatio per 2, $x=\frac{24}{2}=12$.

Inventus est itaque, qui quærebatur, numerus 12, cujus $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=6+4+3=13$.

SCHOLION.

43. Ne Tyronibus materies desit exercitationi, quæ præceptis omnibus est potior, præsertim in arte analytica, hoc mihi semper faciendum censeo, ut ad normam problematum, quæ latiùs exposui, alia suppeditem, quorum solutionem ab iisdem fontibus per se ipsi Tyrones repetant. Quæstiunculas autem non admodum difficiles, quæ per Regulam falsi, aliasque Arithmeticæ vulgaris Regulas operosiùs solvuntur, brevissimè per analysim, summaque facilitate expediri posse intelligent; quantumque Algebra Arithmeticæ præstet, vel ex eo primùm intelligere incipient, quòd omnes illa Arithmeticæ regulas artificio suo complectatur.

PROBLEMA III.

44. Summam pecuniæ, quam mecum habeo, existimat quidam astantium valere 600 aur., cujus errorem sic corrigo. Si ad meam pecuniam accederent partes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, & a summa detraheretur $\frac{1}{12}$ ejusdem meæ pecuniæ, tunc haberem 600 aureos. Quæstio est, quanta sit mea pecunia.

Typus totius resolutionis analyticæ erit hujusmodi:

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}x=600$$
$$x+\frac{6}{12}x+\frac{4}{12}x+\frac{3}{12}x-\frac{1}{12}x=600$$
$$x+\frac{13}{12}x-\frac{1}{12}x=600$$
$$2x=600$$
$$x=300.$$

Nam, si 300 aureis accedant, partes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, nimirum aurei 150, 100, & 75, fiet sum-

summa aureorum 625, & demptâ $\frac{1}{12}$, nimirum aureis 25, reliquus erit numerus 600.

Hæc porro quæstio in numeris abstractis ita proponeretur. Quæratur numerus incognitus x, cui si adjiciatur $+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$ ejusdem, summa æquetur dato numero 600. Unica problematis conditio æquationem exhibet, quam facillimè reduces.

PROBLEMA IV.

45. QUidam in itinere expendit $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{5}$ suæ pecuniæ; domum autem reversus, deprehendit sibi superesse 36 aureos: quantum ergo pecuniæ is secum tulit?

Quæritur numerus x, a quo si auferatur $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{5}$, reliquus sit numerus 36. Invenies 270 aureos, quos secum tulit; nam, ablatis $\frac{2}{3}$, nempe 180, & $\frac{1}{5}$, nimirum 54, supersunt 36.

PROBLEMA V.

46. INterrogatus quidam, quantum pecuniæ in arca haberet, respondit se nescire, hoc tamen se certò a Procuratore cognovisse, $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{5}$ suæ pecuniæ constituere 4700 aureos: quantum ergo pecuniæ is habuit?

Quæritur numerus x, cujus $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x=4700$. Invenies $\frac{47}{60}x=4700$; adeoque, per regulas reductionis multiplicando, & dividendo, $x=600$.

PRO-

PROBLEMA VI.

47. INterrogatus quidam Ludimagister, quot haberet discipulos, respondit: si adhuc semel tot haberem, quot habeo, & accederet $\frac{1}{2}$ eorum, & $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$, & præterea 1, haberem 112: quot ergo discipulos habuit?

Quæritur numerus x, qui bis sumptus, hoc est,

$$2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+1=112$$

Invenies $x=36$

PROBLEMA VII.

48. MErcator proficiscens ad nundinas lucratus est ex pecunia, quam secum attulerat, tantum, ut lucrum unà cum pecunia allata triplum esset pecuniæ allatæ; ex hac deinde pecunia in aliis nundinis tantam pecuniam lucratus est, ut lucrum unà cum pecunia ad has nundinas allata quintuplum esset hujus pecuniæ. Postremò ex hac pecunia in aliis nundinis tantum lucratus est, ut lucrum unà cum pecunia, quam proximè habebat, quadruplum esset hujus pecuniæ, invenitque se habere 40000 aureos: quantum ergo pecuniæ ad primas nundinas attulit?

Quæritur numerus, qui multiplicatus per 3, & productus numerus per 5, & hic numerus productus per 4 faciat 40000. Invenies $x=\frac{40000}{60}=666\frac{40}{60}=666\frac{2}{3}$, quem si multiplices

plices per 3, efficies 2000; & hunc per 5, efficies 10000; & per 4, erit 40000.

PROBLEMA VIII.

49. INveſtigetur numerus, ut eo multiplicato per 4, & hoc producto per 3, & rurſum hoc producto per 6, atque huic producto additis 10, producantur 800. Invenies $10\frac{35}{36}$

PROBLEMA IX.

50. SEnex quidam interroganti de ſua ætate reſpondit, ſe tot habere annos, ut, ſi eis adderetur $\frac{1}{2}$ ipſorum, & ex ſumma detraheretur $\frac{1}{4}$ ejuſdem ſummæ, haberet annos 99: quæritur quot annos habeat?

Status quæſtionis hac æquatione comprehenditur

$$x+\frac{1}{2}x-\frac{x-\frac{1}{2}x}{4}=99$$

quam multiplicando, & dividendo reduces in hanc

$$x=88.$$

Nam ſi numero annorum invento 88, adjicias $\frac{1}{2}$ eorum, nimirum 44, facies 132, a quibus ſi auferas $\frac{1}{4}$, nempe 33, ſupererunt 99.

PROBLEMA X.

51. HOſtilis exercitus tertia pars cæſa, pars quarta capta, 1000 fugerunt: quot ergo fuere univerſi, quot cæſi, quot capti?

Suppoſitionem problematis hæc æquatio repræſentat

$$x=\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+1000$$

quam multiplicando, tranſponendo, & dividendo reduces in hanc

$$x=2400;\ \&c.$$

PROBLEMA XI.

52. TErtiam itineris partem confeci eques, quintam pedes, quæ ſimul efficiunt 50 milliaria: quot ergo milliaria totum iter complectitur, & conſequenter quot eques abſolvi? quot pedes?

Suppoſitio problematis $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x=50$.

OBSERVATIO I.

53. SIquando in alicujus æquationis terminis plures occurrant fractiones, ſive numericæ, ſive litterales, per Reg. III. auferri poterunt.

I. Multiplicando ſucceſſivè terminos omnes æquationis per denominatorem primæ fractionis, novamque æquationem per denominatorem ſecundæ, & ſic deinceps; & habebitur æquatio libera ab omni fractione.

Oporteat fractiones tollere ab æquatione $\frac{x}{a}+\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$.

Multi-

Fractiones tollere. Multiplicetur utrumque membrum per a: fiet $x + \frac{ab}{c} = \frac{ad}{e}$; deinde per c: erit $cx + ab = \frac{acd}{e}$; denique per e: $cex + abe = acd$.

II. Vel unica multiplicatione termini ejusdem æquationis multiplicentur per factum omnium denominatorum.

Sic in adducto exemplo, si factum omnium denominatorum ace ducatur in singulos terminos, habebitur æquatio $\frac{acex}{a} + \frac{aceb}{c} = \frac{aced}{e}$; deletisque litteris numeratori, & denominatori communibus, prodibit æquatio, ut ante, $cex + abe = acd$.

His animadversis, ne quidpiam omittam, quod vel ad levandam Tyronum molestiam in primis hisce reductionum salebris, vel ad acuendum aliqua cum voluptate, exercendumque ingenium conducere posse videatur, placet hoc loco inserere epigrammata aliquot ab Euclide, Ptolomæo, Metrodoro, aliisque incertis auctoribus græcis in morem ænigmatum proposita, quæ Gaspar Bacchettus Diophanti commentator egregius ex Claudio Salmasio ab Antología græca in latium transtulit. Optimus enim artium effector, & magister est, ut verè ajebat Tullius, usus frequens, præsertim in artificio analytico, cujus tam multiplex est, & pluribus ex artibus, Geometriæ præsertim collecta præceptorum ratio.

PRO-

PROBLEMA XII.

De Augeæ armentis, quotnam boves fuerint.

54. Augeam rogat Alcides, quot pascua circũ
Errarent armenta sibi: cui rettulit ille.
Pascitur Alphei rapidas semissis ad undas:
Pars octava sacro Saturni in colle vagatur:
Pone Taraxippi tumulum sextantis oberrat
Dimidium: decimæ semissem detinet Elis:
Denique in Arcadicis trigesima substitit oris;
Quinquaginta vides tamen hìc armenta relinqui.

Quæritur numerus, cujus $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + 50$ efficiant ipsum quæsitum numerum. Invenies 240.

PROBLEMA XIII.

De Palladis Statua, quotnam auri talenta appendat.

55. Aurea Pallas ego; Musis sed amica juventus
Materiam docto præbuit Artifici.
Octavam Thespis, partemque Charisius auri
Dimidiam: decimam contulit ipse Solon:
A Themisone data est vigesima: terna talenta,
Et sena ipse Opifex præstat Aristodicus.

Quæritur numerus x, cujus $\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{20}x + 9 = x$. Invenies 40 talenta pondus quæsitum Statuæ.

PRO-

PROBLEMA XIV.

56. HUnc Diophantus habet tumulum, qui tempora vitæ
Illius mira denotat arte tibi.
Egit sextantem juvenis; lanugine malas
Vestire hinc cœpit parte duodecima.
Septante Uxori post hæc sociatur, & anno
Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquam attigit ille paternæ,
Infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
Cogitur: hinc annos illius assequere.

Quæstionis propositæ typus: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{2}x + 5 + 4 = x$. Invenies 84.

PROBLEMA XV.

57. SUme tibi Phialæ, faber ingeniose, trientem,
Quartamque, & partem sume duodecimam.
Injice fornaci simul omnia mixta; sed inde
Prodeat unam æquans pondere massa minam.

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}x = 1$.

Invenies $x = 1\frac{1}{2}$, nimirum quot minas pendebat Phiala.

PRO-

PROBLEMA XVI.

58. QUæ succisa jacet, multo nux ardua quondam
Pollebat fœtu, numerumque hac arte recenset.
Nostris ex nucibus quintam sibi Parthenopæa,
Octavamque Philinna capit, quartamque Aga- (nippe:
Septima dulcisonæ conceditur Orithiæ:
Eurynomæ sextam e numero sibi vindicat omni:
Centenas ternæ Charites, senasque tulere:
Demum Pierides novies sumpsere novenas;
Summis in ramis septem tamen ecce supersunt.

$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{6}x + 106 + 81 + 7 = x$. Invenies 1680.

PROBLEMA XVII.

59. QUisquis adire cupis Romanam Gadibus urbem,
Sextans ad ripam Bætidis usque viæ est.
Quintantem hinc numera Phocensis ad arva colo- (ni,
A multo regio quæ bove nomen habet.
Inde Pyrenæi præcelsa ad culmina montis
Octans est, decimæ parsque duodecima:
Quarta Pyrenæos, gelidas jacet inter & Alpes:
Parte duodecima hinc incipit Ausonia,
Qua Phaëtontiades sudant electra Sorores;
Sed tamen ulteriùs millia perge duo.
Restabunt quingenta tibi tum denique, donec
Tarpejo possis sistere colle gradum.

Invenies 15000 stadia, quæ inter Gades, & urbem Romanam numerat Auctor.

OBSERVATIO II.

60. Interdum conditio problematis id postulat, ut non aliter ad æquationem deveniri possit, quàm per Regulam trium sæpius institutam; ac, quando id fieri oporteat, natura ipsa propositæ quæstionis Analystam admonebit.

PROBLEMA XVIII.

Totum implere lacum tubulis e quatuor, uno
Est potis iste die, binis hic, & tribus ille,
Quatuor at quartus: dic quo spatio simul omnes?

Pone quatuor tubos simul implere totum lacum diebus x; tum per Regulam trium inquire, quota portio lacus a singulis tubis quæsito tempore impleatur; nimirum, si primus tubus una die implet totum lacum, quantum implebit numerus dierum, vel pars diei x, & invenies portionem lacus ab eodem x designatam. Eadem ratione reperies secundum tubum implere $\frac{1}{2}x$ ejusdem lacus, tertium, $\frac{1}{3}x$, quartum, $\frac{1}{4}x$, ut in Regula trium quater adhibita hìc vides.

Dies	Lacus	Dies	Lacus
1		x?	x
2	1	x?	$\frac{1}{2}x$
3		x?	$\frac{1}{3}x$
4		x?	$\frac{1}{4}x$

At-

Atque hæ omnes partes conficiunt $\frac{26}{24}x + x = 1$

$$26x + 24x = 24$$
$$50x = 24$$
$$x = \frac{24}{50}$$

Quare tubi simul omnes implebunt lacum in $\frac{12}{25}$ diei.

PROBLEMA XIX.

61. Æreus ego sum Leo: ab oculis, ore, dextroque pede aqua perenniter effluit: implent autem craterem eumdem dexter quidem oculus duobus diebus, sinister verò tribus, & pes quatuor diebus: porro sex horis os implere eum potest. Hæc igitur simul omnia, & oculi, & os, & pes, dic quanto tempore eumdem craterem impleant?

Ponatur x pro tempore quæsito horarum, tum, ut prius, quæratur. Si horis 48 impletur 1 crater, horis x implebitur $\frac{1}{48}x$ crateris; & sic de reliquis, ut in Regula trium quater adhibita hìc vides.

Horæ	Crater	Horæ	Crater
48			$\frac{1}{48}x$
72	1	x?	$\frac{1}{72}x$
96			$\frac{1}{96}x$
6			$\frac{1}{6}x$

Atque hæ omnes partes reductis fractionibus faciunt $\frac{61}{288}x$ unius crateris æquales 1

cra-

crateri; hinc æquatio $\frac{61}{288} x = 1$, & $61x = 288$, & $x = \frac{288}{61} = 4\frac{44}{61}$ horis, quibus crater implebitur; quod per regreſſum ſic etiam probari poteſt, ut hìc vides.

Horæ	Crater	Horæ	Crater
48			$\frac{6}{61}$
72	1	$4\frac{44}{61}$?	$\frac{3}{61}$
96			$\frac{4}{61}$
6			$\frac{48}{61}$

Atque omnes iſtæ partes crateris conficiunt unum craterem. Hoc pacto ſolves iſtiuſmodi problemata.

PROBLEMA XX.

62. ÆReus hìc Cyclops Polyphemus: reſpice quali
Arte quis os, oſculum finxerit, atque manum.
Occultos parti ſalientes cuilibet aptans
Effecit, gelidas ut jaculentur aquas;
Ordine ſed tali: plenus tribus ecce diebus
Eſt lacus, e dextræ ſi fluat unda tubo:
Una dies oculo, geminatus ſufficit ori
Quintans: quod ſpatium ſufficit ergo tribus?

PROBLEMA XXI.

63. ME reſera, & lymphas profundens quatuor horis
Subjectum implebo protinus ipſe lacum.
Æquali dexter ſpatio, duploque ſiniſter
Quando fluit, vitreis hunc tubus implet aquis:

Par-

Parte ſed implemus longè breviore diei,
Uno ſi mecum tempore uterque fluat.

PROBLEMA XXII.

64. QUi jaculamur aquas, tres hìc adſtamus Amores,
Sed variè liquidas Euripo immittimus undas.
Dexter ego, ſummis & quæ mihi manat ab alis,
Ipſum lympha replet ſolo ſextante diei;
Quatuor aſt horis lævus verſà influit urnà;
Dimidiatque diem medius, dum fundit ab arcu.
Dic age, quàm paucis Euripum implebimus horis,
Ex arcu ſimul, atque alis, urnàque fluentes?

OBSERVATIO III.

65. HActenus in notatione quantitatum Algebræ veteris inſtitutum ſecuti ſumus, quæ ſolas incognitas quantitates per Symbola, ſeu ſpecies deſignare jubebat; quod ſub initium analyticæ exercitationis ad Tyronum phantaſiam accommodatius fore mihi viſum eſt.

At verò juxta methodum Recentiorum, etiam quantitates cognitæ, ut aliàs diximus, deſignantur per Symbola. Quod additamentum, quamvis primo aſpectu levius fortaſſe videatur, tamen opinione majorem attulit utilitatem, eaque duplex eſt. In primis hac ratione totius operationis veſtigia relegi commodè poſſunt, utcunque plures in decurſu additiones, multiplicationes, diviſioneſve peractæ ſint. Conſtat enim ex ipſo Symbolorum aſpectu, ex quibus quantitatibus, & quomodo unaquæ- Utilitas calculi litteralis.

D 3 que

que quantitas provenerit: quod non contingit, si operationes hujusmodi per notas numericas peragantur. Altera utilitas est universalitas expressionis; sic enim non unicus casus, sed innumeri sub iisdem problematis conditionibus comprehensi solvuntur, ita ut ea resolutio sit veluti formula, aut canon casibus particularibus, prout libuerit, accommodandus, ut planiùs constabit hoc exemplo, quod in hanc rem a Wallisio tom. I. Alg. de notatione cap. 11., de industria fusiùs exponitur, depromptum ab antiquis Græcorum epigrammatis, quæ in morem ænigmatum olim proponebantur.

PROBLEMA XXIII.

66. ACcessit Virgo quædam ad tres successivè Divos, puta Jovem, Apollinem, Palladem. Oravit Jovem, ut quos ipsa secum attulerat nummos, ille duplos efficeret; quo præstito, reddidit illa Jovi in signum grati animi tres asses. Apollo deinde simili oratione compellatus duplicavit Virginis nummos residuos; cui & illa tres statim asses pependit: reliquos autem ad Palladem attulit, quos ipsa geminavit; cui Virgo tres pariter asses donarii loco obtulit: quibus peractis, unicus tandem assis Virgini relictus erat, quem secum retulit. Quæritur quot primùm attulerit.

Hoc ego, inquit Wallisius, ut solvam problema, primò, juxta Veterum Algebram, pro numeris adhuc ignotis substituam characteres, quos Cossicos antiqui appellabant: notos autem notis suis characteribus arithmeticis designabo; deinde verò juxta Recentiorum methodum pro numeris tam notis, quàm ignotis Symbola substituam, usque dum ad solutionem pervenero, ut hoc pacto utriusque methodi exemplum præstem.

Pro ignoto assium allatorum numero pono x: progredior jam ad designandas algebraicè singulas problematis conditiones, quæ mutuò inter se connexæ sunt, donec ad æquationem perveniam, quæ omnes problematis conditiones includat. Itaque hic numerus assium incognitus x, quantuscunque fuerit, a Jove geminatus fit $2x$: hinc demptis tribus assibus Jovi persolutis, restant $2x-3$. Hoc residuum cum geminaverit Apollo, fiunt $4x-6$: hinc, cum tres adhuc asses ablati fuerint Apollini tradendi, manebunt $4x-9$. Hoc residuum Pallas duplicando efficit $8x-18$: unde, cum tres insuper asses sint adhuc auferendi, qui Palladi tribuantur, manebunt tandem $8x-21$; at in quæstione proposita unicus assis superesse dicitur: ergo statuendum est $8x-21$ tantundem esse, ac 1. Hac via æquatio inventa est, quæ omnes problematis conditiones exhaurit $8x-21=1$, & transponendo, & dividendo invenies $x=2\frac{3}{4}$ numerum assium allatorum.

 Typus

Typus totius analytici progressus.

$$\begin{array}{l} x \\ 2x \\ 2x - 3 \\ 4x - 6 \\ 4x - 9 \\ 8x - 18 \\ 8x - 21 = 1 \end{array}$$

SCHOLION.

67. HUjus quæstionis solutio etiam citra opem Algebræ poterat investigari in hunc modum. Si residuo 1 restituantur 3, (qui nuperrimè Palladi solvebantur) fiunt 4: (tot ergo Pallade duplicante provenerant) horum semissis 2 est numerus assium ad Palladem allatorum, quibus si adjiciantur 3, (qui nuper soluti fuerant Apollini) fiunt 5: (tot ergo Apolline duplicante provenerant) horum ergo semissem $2\frac{1}{2}$ ad Apollinem attulerat, quibus si adjiciantur 3, (qui nuper detracti erant solvendi Jovi) fiunt $5\frac{1}{2}$, qui Jove geminante provenerant. Horum ergo semissis $2\frac{3}{4}$ est numerus assium ad Jovem allatorum, atque adeo numerus quæsitus.

Quamvis autem in hujusmodi minoris difficultatis quæstionibus interdum non sit absolutè necessarium, ut methodo algebrica procedatur; hoc tamen utilitatis, inquit Wallisius, utcunque emergit, ut solutio semel investigata possit etiam aliis hypothesibus applicari; nec opus sit pro singulis quæstionis variationibus totam operationum seriem de novo ordiri; ex. c., si cæteris ut prius manentibus, dicamus 3 asses tandem superesse, vel 5, vel 7, eadem æquatio solutionem daret

$$8x - 21 = 3;\quad 8x - 21 = 5;\quad 8x - 21 = 7$$
$$x = 3.\quad\quad x = 3\tfrac{1}{4}.\quad\quad x = 3\tfrac{1}{2}$$

Solutio universalior.

68. PRo numero quæsito pone x: pro binario (quia nempe fit aliquoties numerorum duplicatio) fit a; & deinde pro ternario (quia nempe 3 aliquoties auferuntur) fit b; & denique pro numero residuo (qui hic est 1) fit c: progressus erit hujusmodi:

$$\begin{array}{ll} x & x \\ ax & 2x \\ ax - b & 2x - 3 \\ aax - ab & 4x - 6 \\ aax - ab - b & 4x - 9 \\ aaax - aab - ab & 8x - 18 \\ aaax - aab - ab - b = c & 8x - 21 = 1 \end{array}$$

Ex ipso Symbolorum aspectu in prima formula vestigia releguntur singularum operationum, additionis, multiplicationis &c.; & ex quibus quantitatibus unaquæque provenerit, in oculos incurrit.

Præterea solutio universalior exhibetur; hæc enim Symbola pariter præstabunt quæsitum,

tum, five quemlibet Deorum allatos nummos duplicare, triplicare &c. dixeris; (nempe interpretando a pro 2, 3, 4 &c.) item five tres, quatuor, aut quinque &c. affes fingulis traditos; (nempe interpretando b pro 3, 4, 5) & denique five unum, duos, tres &c. (nempe interpretando c pro 1, 2, 3 &c.) affes tandem fupereffe dixeris; adeoque pro variata hypothefi accommodanda erit folutionis interpretatio.

Itaque fi $a=3$; $b=4$; $c=2$, fubftitutis hifce valoribus in ultima æquatione

$$aaax - aab - ab - b = c$$

$$27x - 9 \times 4 - 3 \times 4 - 4 = 2 \text{ \&c.}$$

OBSERVATIO IV.

69. Diximus Propof. II. problematis determinati hoc effe criterium: *fi numerus datorum a fe mutuò non dependentium, incognitorum numerum adæquet*. At mirari folent Tyrones in plerifque problematis determinatis, quemadmodum in proximè fuperiore, plures haberi conditiones, etiamfi unica fit quæfita quantitas; atque adeo plura effe data, quàm quæfita: contra quam fieri oporteret in problemate determinato. Illud tamen animadvertant velim, omnes hafce conditiones inter fe ita mutuò connexas effe, ut unicam fuppofitionem conficiant, quæ refpondeat unicæ incognitæ, quæ quæritur. Hæc obfervatio alibi erit accuratiùs repetenda, ubi duæ pluresve incognitæ occurrent.

Datorum Criterium.

PRO-

PROBLEMA XXIV.

70. Molà frangendi funt 500 modii tritici: fint 5 molæ, quarum prima fingulis horis frangat 7 modios, fecunda 5, tertia 4, quarta 3, quinta 1. Quanto ergo tempore totum triticum moletur, fi omnibus molis triticum fubjiciatur; & confequenter quantum tritici fingulis molis erit fubjiciendum?

Efto x quæfitus horarum numerus, quibus opus eft, ut 500 modii tritici frangantur eodem tempore molis omnibus fubjecti. Perge jam, & conditiones problematis omnes, quæ inter fe ita connexæ funt, ut una alteram trahat, transfer ad terminos analyticos. Quoniam ergo prima mola fingulis horis molit 7 modios tritici, eadem horis x franget modios $7x$; & fimiliter fecunda modios $5x$; & tertia $4x$; & quarta $3x$; & quinta $1x$; quorum fumma ex conditione problematis æquabitur modiis 500. Eft ergo $20x = 500$ &c.

OBSERVATIO V.

71. Interdum fuppofitio problematis includit ejufdem quantitatis incognitæ duos valores analyticos, quorum æqualitate elicitur æquatio, quæ problema refolvit.

PRO-

PROBLEMA XXV.

Ludimagister quidam tot habet discipulos, ut, si singuli persolvant 5 aureos, desint illi 30 aurei ad emendam domum, in qua habitat; si verò singuli dent 6 aureos, supersint 40 aurei ultra pretium domus. Quot ergo habet discipulos; & consequenter quantum est pretium domus?

Quæritur numerus, qui multiplicatus per 5 talem procreet numerum, ut additis 30, eadem summa fiat, quæ haberetur, si idem numerus per 6 multiplicetur, & a producto detrahantur 40.

Esto numerus discipulorum x; $5x+30$ valor domus in prima hypothesi; $6x-40$ valor ejusdem domus in secunda hypothesi. Ex æqualitate valorum ejusdem domus in hac duplici hypothesi elicitur æquatio

$$6x-40=5x+30 \text{ \&c.}$$

PROBLEMA XXVI.

72. Civis quidam invenit nescio quot pauperes ante fores domus, quibus e nummulis, quos in crumena habet, septenos erogat, quo facto supersunt ei 24. Quòd si cuilibet dare voluisset 9, defuissent illi 32 nummuli. Quæritur quot pauperes fuerint; & consequenter quot nummulos civis ille habuerit.

Repræsentetur in utraque hypothesi valor analyticus ejusdem pecuniæ, quam habet in theca nummaria, hoc pacto. Esto numerus pauperum x: ergo si singulis erogentur 7 nummuli, eorum numerus erit $7x$, quibus adjici debent 24, ut exhibeatur eorum summa ad normam primæ hypothesis, nempe $7x+24$.

In secunda hypothesi invenies valorem analyticum eorumdem esse $9x-32$: hinc æquatio valorum, $7x+24=9x-32$.

OBSERVATIO VI.

73. In problematis arithmeticis determinatis artificium analyticum eò tandem devolvitur, ut sensus quæstionis sermone, ut ita dicam, algebraico designetur. Nam conditiones ejus ad algebraicos terminos sic translatæ, inquit Newtonus, tot dabunt æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt. Exemplo sit idem problema, quod sub aliis terminis a Newtono ita proponitur, & solvitur; quodque est in ordine quartum. Status quæstionis analyticè designatus.

Viro cuidam nummos inter mendicantes distribuere volenti desunt 8 *denarii, quominus det singulis* 3 *denarios: dat itaque singulis* 2 *denarios, & 3 denarii supersunt. Quæritur numerus mendicantium.*

Esto numerus mendicantium x, *& deerunt* 8 *denarii, quominus det omnibus* 3 x *denarios.* *Habet*

Habet itaque $3x-8$ *denarios: ex his autem dat* $2x$ *denarios, & reliqui denarii* $x-8$ *sunt tres; hoc est,* $x-8=3$, *seu* $x=11$.

Vides quanta facilitate, & brevitate ventum ſit ad æquationem $x-8=3$, eo ſolo artificio transferendi conditiones ſingulas, prout eſt natura quæſtionis, in ſermonem analyticum? Verùm hæc animadverſio paulo infra erit luculentiùs ex eodem Newtono tractanda, quippe quæ viam aperit expeditiſſimam, qua ſtatim decurſis conditionibus ad æquationem perveniatur.

OBSERVATIO VII.

74. ANtequam crebra exemplorum inductione oſtendam, quàm latè pateat harum, & ſequentium regularum uſus in ſolutione problematum, reducendiſque æquationibus, neceſſarium duxi Tyronis ingenium hac prima exercitatione quaſi ſubactum eò deducere, ut jam intelligat, quantùm Algebra Arithmeticæ præceptionibus præſtet.

Analyſis præſtantia. I. Methodus analytica vià planè compendiarià illud aſſequitur, quod Arithmetica nonniſi attentando poteſt deprehendere.

II. Arithmetica definitè, & particulariter procedit, inquit Newtonus, algebraica autem indefinitè, & univerſaliter, ita ut enunciata ferè omnia, quæ in hac computatione habentur, & præſertim concluſiones, theoremata dici

dici poſſint, multòque plures, quàm quæſtio ipſa requireret, veritates retegunt.

III. Nihil habet Arithmetica, quod Algebram fugiat: quæ evolvere Arithmetica cum nequeat, dirimenda Algebræ tradat, habet prope infinita.

PROBLEMA XXVII.

75. QUæritur numerus, qui multiplicatus per 3 exhibeat productum, quod ſit $\frac{1}{9}$ ſui quadrati.

Hæc quæſtio, quam per Analyſim ſtatim diſſolveres, per Arithmeticam reſolvi nequaquam poteſt, niſi attentando, videlicet alias ex aliis ſuppoſitiones faciendo, donec caſu potius, quàm certà vià, & ratione incidas in numerum, qui habeat quæſitas conditiones: quod experiri ipſe per te poteris.

Pono itaque numerum quæſitum eſſe 4, qui, ſi multiplicetur per 3, exhibet productum 12, quod cum non ſit $\frac{1}{9}$ ſui quadrati 16, intelligo ſuppoſitionem a me factam falſam eſſe.

Experior numerum 5, quem ſuppono eſſe quæſitum. At 3×5 efficit 15, quod non eſt $\frac{1}{9}$ ſui quadrati 25: hinc falſa eſt quoque ſuppoſitio ſecunda.

Accipio 6, qui multiplicatus per 3 parit 18; ſed neque hic ſatisfacit conditioni problematis.

Atque ita porro novas ſuppoſitiones experior, donec incidam in numerum 27, qui multiplicatus per 3 facit 81: qui numerus reipsa est $\frac{1}{9}$ sui quadrati 729.

Vides, quàm longo, & inani suppositionum circuitu opus sit, antequam latentem numerum arripias? Præterea hæc resolutio, quam attentando inveni, mihi pene inutilis est, utpote qui ad infinitas id genus quæstiones dirimendas, eà quasi canone, seu regula generali uti minimè possum. Finge enim propositam rursus quæstionem ejusdem planè naturæ, in qua tantummodo multiplicator numeri incogniti mutetur, & etiam denominator fractionis; nempe quæratur numerus, qui multiplicatus per 4 exhibeat $\frac{1}{11}$ sui quadrati. Enimvero ex prima resolutione problematis nihil te profecisse animadvertis: pertentanda tibi est nova suppositionum series, ac verendum sæpius, ne labor irritus te fatiget.

Venio jam ad calculum algebraicum. Pono numerum incognitum esse x: ipsius quadratum erit xx. Jam verò, si numerus incognitus multiplicetur per 3, fiet $3x$: hoc factum ex conditione problematis æquari debet nonæ parti quadrati xx, seu quadrato xx diviso per 9, quod ita exprimitur $\frac{xx}{9}$: habeo ergo hanc primam æquationem $3x = \frac{xx}{9}$.

Multiplicetur utrumque membrum per 9, ut tollatur fractio, oritur æquatio secunda $27x = xx$.

Denique per Regulam II. dividantur omnes

nes

nes æquationis termini per x: obtinetur æquatio tertia, & resolutio problematis $27 = x$. Et sanè inventum numerum 27 eum esse, qui quærebatur, statim constat; nam $27 \times 3 = 81$; $27 \times 27 = 729$; & $27 \times 3 = \frac{729}{9}$.

Quòd si quis resolutionem universalem aggredi velit, quantitates cognitas primis alphabeti litteris designet, sitque $3 = a$; $9 = b$;

Quare $ax = \frac{xx}{b}$

$$abx = xx$$

$$ab = x.$$

Quàm brevis, quàm concinna, & expedita sit hæc resolutio, si cum incerto Arithmeticæ ambitu conferatur, nemo non videt. Prima æquatio statum quæstionis repræsentat: postrema æquatio instar canonis universalis docet multiplicatorem in denominatorem ductum æquari numero incognito. Hinc resolutio problematis regulam generalem suppeditat, quæ casus omnes complectatur similium quæstionum, ita ut, quantumvis licet varietur multiplicator, & denominator, tamen horum productum exhibebit tibi in omni casu solutionem problematis, & quæsitum numerum. Atque ita, si quæratur numerus, qui ductus in 8 exhibeat decimam partem sui quadrati, factum 80 ex multiplicatore in denominatorem erit quæsitus numerus: atque ita in infinitum.

OBSERVATIO VIII.

76. SI conditio problematis, quod sæpissime usuvenit, analogiam includat, ex hac deducenda æquatio per regulas proportionum jam traditas libro I., & uberiùs explicandas in tertia parte.

PROBLEMA XXVIII.

INvenire numerum aliquem x, qui duos datos a, & b ita dividat, ut, si quotorum utrique addatur datus numerus c, summæ hinc emergentes sint in data ratione d ad e.

Suppositio unica problematis $\frac{a}{x}+c:\frac{b}{x}+c::d:e$

Antecedens, & consequens primæ rationis revocentur ad communem denominatorem;

$$\frac{a+cx}{x}:\frac{b+cx}{x}::d:e$$

& per eumdē multiplicentur, $a+cx:b+cx::d:e$

Hinc æquatio $ae+cex=bd+cdx$,

& transponendo $cex-cdx=bd-ae$,

& dividendo $x=\frac{bd-ae}{ce-cd}$.

77. In hac postrema formula, in qua valor incognitæ x exprimitur, universalis regula continetur omnibus similibus exemplis accommodata, quæ quidem sic enunciabitur.

Regula: datos numeros a, & b duc in alternos datæ rationis terminos e, & d: productum minus a majori subtrahe: quod reliquum est $bd-ae$ erit numerus dividendus. Similiter numerum addendum c duc singillatim in utrumque rationis terminum; iterumque productum minus a majori subtrahe: reliquum $ce-cd$ erit divisor, per quem si dividatur dividendus, quotus erit numerus quæsitus x.

Ad hunc modum pro quolibet quæstionum genere per analysim peculiaris invenitur regula; interque infinitas istas regulas hæc sola differentia est, inquit Jacobus Bernoullius tom. 1. solut. terg. probl., quòd paucæ admodum illarum, quæ in vita civili insignem, & frequentem habent usum, vulgò in regulas arithmeticas referri soleant, adeo ut vulgaris Arithmetica numerosa, propriè loquendo, nihil sit aliud, quàm complexio quinque, vel sex æquationum algebricarum, seu regularum præ cæteris in vita civili eximium usum habentium. Regulæ arithmeticæ.

OBSERVATIO IX.

78. ETsi problemata contracta ad peculiares casus magìs delectant Tyrones, quàm abstracta; tamen verissimè monet Wolfius problemata istiusmodi specialia sub initium difficiliora esse, quàm abstracta, quoniam in his æquatio plerumque continetur, aut ex theorematis arithmeticis facilè eruitur: in illis autem ex circumstantiis problematis elicienda est. Quòd si plures circumstantiæ occurrunt, Ty-

rones non ſtatim eas pervident, quæ æquationem ſuppeditant.

PROBLEMA XXIX.

79. Viator quidam conficit quotidie 6 milliaria: alius verò quarto poſt die elapſo idem iter inſtituit ex eodem loco, conficitque quotidie 8 milliaria. Quæritur quoto die poſterior priorem aſſequetur.

Idem universalius.

Dato itinere diurno viatoris alicujus unà cum itinere diurno alterius ipſum dato tempore ſequentis, invenire tempus, quo illum hic aſſequetur.

Vel multò etiam univerſalius traduci poteſt idem problema ad quæcunque mobilia, hoc pacto.

Data velocitate unius mobilis unà cum velocitate alterius, ipſum dato tempore ſequentis, invenire tempus, quo mobile poſterius aſſequatur primum, quod præceſſit.

Finge datum, quem quærimus, numerum dierum x, quibus poſterior viator priorem aſſequatur. Perſpicuum eſt autem, quo tempore ambo ſimul convenient, totidem ab utroque milliaria fore confecta. Hinc apparet, unde, & ex qua circumſtantia problematis ſit elicienda æquatio. Itaque utriuſque viatoris milliaria ſunt analyticè deſignanda, & eorum æquatio inſtituenda.

Prior ergo viator ultra 24 milliaria, quæ quatuor primis diebus conficit, diebus x conficiet milliaria $6x$, quandoquidem ſingulis diebus ſex milliaria conficit.

Poſterior autem diebus x conficiet milliaria $8x$ ex conditione problematis. Hinc æquatio $24 + 6x = 8x$; & tranſponendo, & dividendo invenies $12 = x$, quæſitum numerum dierum, quibus poſterior viator priorem aſſequetur.

Hæc porro quæſtio in numeris abſtractis ita proponeretur. Quæratur numerus x, qui ductus in 6, &, ad productum addito 24, numerum efficiat æqualem ei, qui ex eodem numero x in 8 multiplicato gignitur. Problematis autem ita abſtractè propoſiti ſuppoſitio unica immediatè æquationem exhibet $24 + 6x = 8x$. Hinc reſolutio multò facilior, uti obſervatum eſt.

Resolutio universalis.

80. Data velocitate, ſeu itinere diurno viatoris alicujus, unà cum velocitate, ſeu itinere diurno alterius, ipſum dato tempore inſequentis, invenire tempus, quo illum hic aſſequetur.

Velocitas, ſeu iter diurnum primi ſit	$6 = a$
Velocitas, ſeu iter diurnum ſecundi	$8 = b$
Tempus datum	$4 = c$
Tempus quæſitum	$= x$
Iter intra tempus datum a primo confectũ	$= ac$

Iter intra quæſitum ab eodem confectum $= ax$.
Iter poſterioris intra tempus quæſitum $= bx$.
Quare, cum per conditionem problematis poſterior viator priorem aſſequi debeat intra quæſitum tempus x, erit æquatio $ac + ax = bx$; & ſubtrahendo utrinque ax, quia bx ſupponitur major quàm ax, erit $ac = bx - ax$; & dividendo reperietur $\frac{ac}{b-a} = x = \frac{24}{2} = 12$.

Æquatio penultima $ac = bx - ax$ in hanc reſolvitur analogiam, $b - a : a :: c : x$, quæ ſequens ſuppeditat.

Theorema.

81. Si quidam viator alterum inſequitur tempore aliquo elapſo, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, eſt ad viam primi, quem alter inſequitur, ut tempus ab itinere primi elapſum ad tempus, quo alter ipſum aſſequitur.

Æquatio ultima $\frac{ac}{b-a} = x$ regulam arithmeticam univerſalem de more exhibet, qua infiniti caſus ſimilium quæſtionum reſolvantur.

Regula.

Factum ex velocitate primi mobilis in tempus datum dividatur per differentiam velocitatum: quotiens erit tempus quæſitum.

Hæc eadem quæſtio abſtractè rurſum ita pro-

poni poſſet. Datis tribus quantitatibus a, b, c invenire quartam x, ita ut factum ex quarta in ſecundam æquale ſit facto ex prima in aggregatum ex tertia, & quarta, hoc eſt: $ac + ax = bx$.

Problema XXX.

82. Viator ſingulis diebus 6 milliaria conficit; alius verò quarto poſt die elapſo idem iter ingreditur. Quæritur quot milliaria abſolvere debeat poſterior, ut priorem aſſequatur 12 diebus.

Idem universalius.

Data velocitate, ſeu itinere diurno unius viatoris, unà cum tempore ab initio motus elapſo, invenire velocitatem, ſeu iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut dato tempore illum aſſequatur.

Resolutio universalis.

Iter diurnum primi	$6 = a$
Tempus elapſum	$4 = b$
Tempus datum	$12 = c$
Iter diurnum alterius	$= x$
Iter intra tempus elapſum a primo confectum	$= ab$
Iter intra tempus datum a primo confectum	$= ac$
Iter diurnum alterius conficiendum, ut priorem dato tempore aſſequatur	$= cx$.

Hac

Hac facta terminorum omnium, quos status quæstionis complectitur, notatione algebrica, per conditionem problematis, ut in Probl. præced., habes æquationem

$$ab + ac = cx$$

$$\frac{ab + ac}{c} = x = \frac{24 + 72}{12} = \frac{96}{12} = 8.$$

Æquatio penultima $ab + ac = cx$ in hanc analogiam resolvitur $c : b + c :: a : x$.

Theorema.

83. Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso, erit tempus, intra quod ipsum assequitur, ad tempus ab initio itineris ejus elapsum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum secundi.

Ab ultima æquatione deducitur.

Canon.

Factum ex velocitate primi mobilis in aggregatum temporum dividatur per tempus datum, quotiens erit velocitas secundi mobilis.

In numeris abstractis hæc eadem quæstio sic enunciatur. Datis tribus quantitatibus a, b, c invenire quartam x hac lege, ut factum ex prima in aggregatum ex secunda, & tertia æquale sit facto ex tertia in quartam.

Problema XXXI.

84. Duo Tabellarii ex duabus civitatibus, inter quas intercipiuntur milliaria 120, eodem die proficiscuntur alter alterum versùs: unus quolibet die conficit 6 milliaria, alter 4. Quæritur quando convenient, sibique mutuò occurrent?

Idem generalius.

Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo mobilia egrediuntur, unà cum velocitate uniuscujuslibet, invenire tempus, quo sibi mutuò occurrent.

Intervallum locorum	$120 = a$
Velocitas primi	$6 = b$
secundi	$4 = c$
Tempus occursus	$= x$
Via a primo intra tempus x confecta	$= bx$
Via a secundo intra idem tempus x confecta	$= cx$.

Quare, cum ambo simul emensi sint totum intervallum locorum, unde egrediebantur, erit ex conditione problematis $bx + cx = a$; adeoque $x = \frac{a}{b + c} = \frac{120}{6 + 4} = 12$.

Duodecimo igitur die sibi mutuò occurrent.

CANON.

QUotiens ortus ex divisione intervalli per aggregatum velocitatum, est tempus quæsitum.

IN NUMERIS.

INvenire numerum x, qui in summam duorum datorum $b + c$ producat numerum datum.

OBSERVATIO X.

85. IN denominandis quantitatibus, quæ æquationem ingredi debent, interdum regulà trium opus est, ut jam monui. Præterea æquatio non semper immediatè ex circumstantia problematis proficiscitur; sed ex eadem eruenda est facili, & obvio discursu, uti factum vides in hoc problemate arithmetico, quod proponitur a Newtono; & est in ordine quintum.

PROBLEMA XXXII.

86. *SI Tabellarii duo* A, *&* B, *59 milliaribus distantes, tempore matutino obviam eant, quorum* A *conficit 7 milliaria in 2 horis, &* B *8 milliaria in 3 horis, ac* B *unà horà seriùs iter instituit, quàm* A: *quæritur longitudo itineris, quod* A *conficiet, antequam conveniet* B.

Æqua-

Æquationem a nota temporum differentia investigari oportere perspicuum est: quare Analystæ solertia eò dirigi debet, ut utriusque mobilis tempora, quibus respectiva longitudo percurritur, analyticè designentur.

Dic longitudinem illam x; *& erit* $59 - x$ *longitudo itineris* B. (ne symbola quantitatum incognitarum multiplicentur, consultius est, quando fieri id possit, quantitates incognitas per relationem ad cognitas denominare: de hoc artificio agendum erit n. 204.) *Et cum* A *pertranseat 7 milliaria in 2 horis, pertransibit spatium* x *in* $\frac{2x}{7}$ *horis, eo quòd sit 7 mill: 2 bor. :: x mill:* $\frac{2x}{7}$ *hor. Atque ita, cum* B *pertranseat 8 mill. in 3 hor., pertransibit spatium suum* $59 - x$ *in* $\frac{177 - 3x}{8}$ *horis. Jam, cum horum temporum differentia sit 1 hora, ut evadant æqualia, adde differentiam illam breviori tempori, nempe tempori* $\frac{177 - 3x}{8}$, *& emerget* $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$; *& per reductionem* $35 = x$; *nam multiplicando per 8, fit* $185 - 3x = \frac{16x}{7}$; *dein multiplicando etiam per 7, fit* $1295 - 21x = 16x$, *seu* $1295 = 37x$; *& dividendo denique per 37, exoritur* $35 = x$. *Sunt itaque 35 mill. iter, quod* A *conficiet, antequam conveniet* B.

OB-

OBSERVATIO XI.

87. SÆpe etiam particulare quoddam problema ad eam universalitatem transferri potest, ut diversos casus comprehendat, quos in generali ejusdem resolutione oporteat accuratè distinguere, & singillatim resolvere, ne manca sit formula generalis ad similium quæstionum casus particulares accommodanda. Quod factum hic vides a Newtono in superiore problemate.

Universalitas problematis.

IDEM GENERALIUS.

88. *Datis duorum mobilium* A, *&* B, *eodem cursu pergentium celeritatibus, unà cum intervallo locorum, ac temporum, a quibus incipiunt moveri, determinare metam, in qua convenient.*

Pone mobilis A *eam esse celeritatem, qua spatium* c *pertransire possit in tempore* f, *& mobilis* B *eam esse, qua spatium* d *pertransire possit in tempore* g; *& locorum intervallum esse* e, *ac* h *temporum, in quibus moveri incipiunt.*

CASUS I.

DEinde, si ambo ad easdem plagas tendant, & A *sit mobile, quod sub initio motus longiùs distat a meta, pone distantiam illam esse* x, *indeque aufer intervallum* e, *& restabit* x — e

pro

pro distantia B *a meta. Et cum* A *pertranseat spatium* c *in tempore* f, *tempus, in quo pertransibit spatium* x, *erit* $\frac{fx}{c}$, *eo quòd sit spatium* c *ad tempus* f, *ut spatium* x *ad tempus* $\frac{fx}{c}$. *Atque ita, cum* B *pertranseat spatium* d *in* g, *tempus, in quo pertransibit spatium* x — e, *erit* $\frac{gx - ge}{d}$.

Jam, cum horum temporum differentia supponatur h, *ut ea evadant æqualia, adde* h *breviori tempori, nempe tempori* $\frac{fx}{c}$, *si modo* B *prius incipiat moveri, & evadet* $\frac{fx}{c} + h = \frac{gx - ge}{d}$; *& per reductionem* $\frac{cge + cdh}{cg - df}$, *vel* $\frac{ge + dh}{g - \frac{df}{c}} = x$.

Sin A *prius moveri incipiat, adde* h *tempori* $\frac{gx - ge}{d}$, *& evadet* $\frac{fx}{c} = h + \frac{gx - ge}{d}$; *& per reductionem* $\frac{cge - cdh}{cg - df} = x$.

CASUS II.

QUòd si mobilia obviam eant, & x *ut ante ponatur initialis distantia mobilis* A *a meta, tum* e — x *erit initialis distantia ipsius* B *ab eadem meta; &* $\frac{fx}{c}$ *tempus, in quo* A *conficiet distantiam* x; *atque* $\frac{ge - gx}{d}$ *tempus, in*

quo

quo B *conficiet distantiam suam* $e-x$. *Quorum temporum minori, ut supra, adde differentiam* h, *nempe tempori* $\frac{fx}{c}$, *si* B *prius incipiat moveri, & sic habebitur* $\frac{fx}{c}+h=\frac{ge-gx}{d}$; *& per reductionem* $\frac{cge-cdh}{cg+df}=x$. *Sin* A *prius incipiat moveri, adde* h *tempori* $\frac{ge-gx}{d}$, *& evadet* $\frac{fx}{c}=h+\frac{ge-gx}{d}$; *& per reductionem* $\frac{cge+cdh}{cg+df}=x$.

Exempl. I. *Si quotidie Sol unum gradum conficit, & Luna tredecim, & ad tempus aliquod Sol sit in principio Cancri, atque post tres dies Luna in principio Arietis: quæritur locus conjunctionis proximè futuræ. Resp. in* $10\frac{3}{4}$ *gr. Cancri; nam, cum ambo ad easdem plagas eant, & serior sit Epocha motus Lunæ, quæ longiùs distat a meta, erit* A *Luna*, B *Sol, &* $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ *longitudo itineris lunaris, quæ, si scribatur* 13 *pro* c; 1 *pro* f, d, *ac* g; 90 *pro* e; *&* 3 *pro* h, *evadet* $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\times1-1\times1}$; *hoc est,* $\frac{1209}{12}$, *sive* $100\frac{3}{4}$. *Hos itaque gradus adjice principio Arietis, & prodibit* $10\frac{3}{4}$ *gr. Cancri.*

Exempl. II. *Si Tabellarii duo* A, *&* B, 59 *milliaribus distantes, tempore matutino obviam eant, quorum* A *conficit* 7 *milliaria in* 2 *horis, &* B 8 *milliaria in* 3 *horis, &* B *unà horà seriùs iter instituit quàm* A: *quæritur iter, quod* A *conficiet, antequam conveniat* B. *Resp.* 35 *mill.; nam, cum obviam eant, &* A *primò instituat iter, erit* $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ *iter quæsitum. Et hoc, scribatur* 7 *pro* c, 2 *pro* f, 8 *pro* d, 3 *pro* g, 59 *pro* e, *&* 1 *pro* h, *evadet* $\frac{7\times3\times59+7\times8\times1}{7\times3+8\times2}$; *hoc est,* $\frac{1295}{37}$, *sive* 35.

PROBLEMA XXXIII.

89. D*Atis plurium agentium viribus, tempus* x *determinare, in quo datum effectum* d *conjunctim producent.*

Agentium A, B, C *vires ponantur, quæ in temporibus* e, f, g *producant effectus* a, b, c *respectivè; & hæ in tempore* x *producent effectus* $\frac{ax}{e}$, $\frac{bx}{f}$, $\frac{cx}{g}$. *Quare est* $\frac{ax}{e}+\frac{bx}{f}+\frac{cx}{g}=d$; *& per reductionem* $x=\frac{d}{\frac{a}{e}+\frac{b}{f}+\frac{c}{g}}$.

Exempl. *Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere possunt, viz.* A *semel in tribus septimanis,* B *ter in octo septimanis, &* C *quinquies in duodecim septimanis. Quæritur quanto tempore simul absolvent? Sunt itaque Agentium* A, B, C *vires, quæ temporibus* 3, 8, 12 *producant effectus* 1, 3, 5 *respectivè; & quæ-*

quæritur tempus, quo absolvent effectum 1. *Quare pro* a, b, c, d, e, f, g *scribe* 1, 3, 5, 1, 3, 8, 12, *&* *proveniet* $x = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$, *sive* $\frac{8}{9}$ *sept., hoc est, 6 dies,* $5\frac{1}{3}$ *horæ, tempus, quo simul absolvent.*

SCHOLION.

90. HOc problema, quod inter arithmetica a Newtono proposita, est in ordine septimum, in gratiam Tyronum annotationibus aliquot est explanandum.

Quoniam vires datæ sunt, dantur consequenter tempora, & effectus iisdem temporibus respectivè producti, uti notio ipsa virium postulat. Quare ea, quæ in datis includuntur, in ipso aditu resolvendi problematis evolvenda, ac designanda sunt. Agentium itaque A, B, C vires ponantur, quæ in temporibus e, f, g producant effectus a, b, c respectivè.

Rursum, quia prima fronte statim prospicitur æquationem instituendam esse inter effectum datum d conjunctim productum tempore x, & summam omnium singularium effectuum, quos eodem tempore x singuli respectivè producent, idcirco valores hujusmodi erunt singillatim analyticè designandi: quod obtinebitur per Regulam trium ter institutam. Nam, uti se habet tempus datum alicujus Agentis ad suum effectum, ita tempus quæsitum x ejusdem Agentis ad effectum suum respectivè.

$$e : a :: x : \frac{ax}{e}$$
$$f : b :: x : \frac{bx}{f}$$
$$g : c :: x : \frac{cx}{g}$$

Summa autem omnium horum valorum $\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g}$ æquare debet ex conditione problematis datum effectum d conjunctim productum. Quare est $\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$. Fractiones per Regulam III. reductionis tolluntur, vel multiplicando quodlibet membrum æquationis utrinque per denominatorem primæ fractionis, novamque æquationem per denominatorem secundæ fractionis, ac tertiam denique per denominatorem tertiæ, hoc pacto.

$$ax + \frac{ebx}{f} + \frac{ecx}{g} = ed$$
$$afx + ebx + \frac{ecfx}{g} = edf$$
$$afgx + ebgx + ecfx = edfg$$

Vel expeditiùs unica operatione tolluntur fractiones multiplicando utrinque quodlibet membrum per factum omnium denominatorum efg. Dividendo itaque erit $x = \frac{edfg}{afg + beg + cef}$ Vel dividendo rursum tam numeratorem, quàm denominatorem per efg, erit $x = \frac{d}{\frac{a}{e} + \frac{b}{f} + \frac{c}{g}}$

REGULA VII.

91. *Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utraque æquationis parte instituitur.*

Quemadmodum si habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, *extracta utrobique radice prodit* $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$

Quòd si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$, *transfer* $2ax$, *& exurget* $xx - 2ax + aa = bb$; *extractisque partium radicibus*, $x - a = +$, *vel* $- b$, *seu* $x = a \pm b$.

Sic etiam habito $xx = ax - bb$, *adde utrinque* $- ax + \frac{1}{4}aa$, *& prodit* $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$; *& extracta utrobique radice*, $x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, *seu* $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

De Reductione per extractionem radicis.

92. Extractione radicum æquationes ad simpliciorem expressionem etiam reducuntur. Cum enim æqualium quadratorum, cuborum &c. æqualia quoque sint latera, seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, vel cubica &c., perseveret æqualitas. Itaque

I. Quoties in uno æquationis membro quantitates cognitæ dumtaxat continentur, & in altero reperitur potestas aliqua perfecta, extrahendo ex utraque parte æquationis radicem ejus potestatis, æquatio longè simplicior habebitur.

Sic æquatio $xx = 25$, reducta fiet $x = 5$; & $z^3 = 125$ erit, extracta utrinque radice cubica, $z = 5$. Eadem ratione si habeatur $zz = aa + 2ab + bb$, extracta utrobique radice quadrata, fiet $z = a + b$. Et $xx - 2ax + aa = bc$, reducta $x - a = \sqrt{bc}$; & transponendo $x = a + \sqrt{bc}$. Et $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = abc$, reducta erit $x - a = \sqrt[3]{abc}$; & transponendo $x = a + \sqrt[3]{abc}$.

II. Interdum ab una parte æquationis ad alteram transferenda est quantitas aliqua, ut compleatur potestas, cujus radix quæritur.

Sic in exemplo Newtoniano, si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$, vel $xx - 2ax = bb - aa$, transfer in primo casu $2ax$, & in secundo casu $- aa$; & exurget $xx - 2ax + aa = bb$, completaque in primo membro potestate quadratica, extractisque partium radicibus, fiet $x - a = b$, hoc est, $x = a \pm b$, quia radix quadrati cujuscumque bb est vel negativa $- b$, vel positiva $+ b$, uti prædiximus, ubi de genesi potestatum.

III. Neque verò æquationes istæ $x = a + \sqrt{bc}$, & $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ sunt rursus reducendæ, ut a radicalibus liberentur; ratio est, quia radicales quantitates unicè simplicitati æquationum officiunt, cum in iis incognitæ continentur; at quoties ex solis cognitis constant, nequaquam sunt impedimento, & po-

poteſt ab iis radicalibus æquatio vel ſolius ſubſtitutionis ope liberari. Qua ratione ex æquatione $x = a + \sqrt{bc}$ auferetur quantitas radicalis ponendo $\sqrt{bc} = e$, & exurget $x = a + e$; atque ita de reliquis.

Complere poteſtates imperfectas.

IV. Sæpe etiam, ut æquatio ad ſimpliciorem expreſſionem extractione radicum poſſit revocari, neceſſe eſt utrique membro æquationis aliquid apponere, & poteſtatem imperfectam hac ratione complere, quò capax fiat extractionis radicis imperatæ.

Sic, ut æquatio $x^2 + 2ax = a^2$ ſimplicior evadat extractione radicis quadratæ, addatur ad utramque partem a^2, ita ut fiat $x^2 + 2ax + a^2 = 2a^2$; & jam extrahendo utrinque quadratam radicem, erit $x + a = \sqrt{2a^2}$. Similiter, ut ſimplicior fiat æquatio iſta $x^4 + 2a^2x^2 = 3a^4$, addatur utrinque a^4: orietur $x^4 + 2a^2x^2 + a^4 = 4a^4$; & extracta utrinque radice quadrata, reducetur ad hanc $x^2 + a^2 = 2a^2$, ſive $x^2 = a^2$, quæ fiet ſimpliciſſima, ſi utrinque rurſus quadrata radix extrahatur. Simili ratione, ſi ab æquatione $x^3 - 3bxx + 3bbx = c^3$ auferatur utrinque b^3, obtinebitur nova æquatio $x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3 = c^3 - b^3$, cujus primum membrum hoc additamento negativo reductum eſt ad cubum perfectum, extractaque utrinque radice cubica multò ſimplicior æquatio obtinebitur $x - b = \sqrt[3]{c^3 - b^3}$; & per tranſpoſitionem $x = b + \sqrt[3]{c^3 - b^3}$. Sic etiam, inquit Newtonus, habito $xx = ax - bb$, adde utrinque $-ax + \frac{1}{4}aa$, & prodit

dit $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$; & extracta utrobique radice &c.

Hoc artificio, cujus generalem methodum mox exponam, utuntur paſſim Analyſtæ in reſolvendis æquationibus ſecundi gradus, quas vocant affectas. Æquationes autem id genus omnes, nulla ſignorum, quibus termini afficiuntur, ratione habita, poſſunt ſub hac forma exhiberi $x^2 + 2ax = ab$; vel $x^2 + 2ax - ab = 0$; in qua tres termini diſtinguendi ſunt. Primus terminus ille dicitur, in quo incognita xx ad duas dimenſiones aſcendit: ſecundus terminus $2ax$ ille eſt, in quo incognita x eſt linearis, ſeu primi gradus: tertius eſt ille, qui ex omnibus cognitis coaleſcit, uti ab.

Methodus generalis reſolvendi æquationes ſecundi gradus.

93. HÆc methodus derivatur a conſtitutione quadrati radicis binomiæ, hoc pacto. Eſto radix binomia $x + a$, cujus primus terminus x ſit quantitas incognita, & ſecundus a quantitas cognita. Attollatur hoc binomium ad poteſtatem ſecundam: ipſius quadratum $xx + 2ax + aa$ continebit tres terminos, quorum primus xx erit quadratum quantitatis incognitæ; tertius aa erit quadratum quantitatis cognitæ; & ſecundus terminus erit factum quantitatis incognitæ per duplum $2a$ quantitatis cognitæ. Hoc autem duplum $2a$ dici ſolet *coefficiens* ſecundi termini; & univer-

versaliter quantitas quævis cognita, quæ multiplicet incognitam in quocunque æquationis termino, appellabitur deinceps *coefficiens* illius termini.

COROLLARIUM I.

94. AB hac constitutione quadrati radicis binomiæ illud evidenter consequitur, quòd, si sumatur semissis a coefficientis $2a$ secundi termini, hæc semissis erit radix tertii termini aa.

COROLLARIUM II.

95. SI ex defectu tertii termini aa manca, & imperfecta haberetur constitutio quadrati radicis binomiæ in aliquo æquationis membro, puta, $xx + 2ax = bb$; tertius iste terminus aa facilè inveniretur, sumendo semissem a coefficientis cogniti $2a$ secundi termini, & attollendo semissem ad quadratum aa: quod utrique membro æquationis erit adjiciendum, ne æqualitas tollatur; atque ita æquatio prior in hanc mutabitur $xx + 2ax + aa = aa + bb$; extractaque utrinque radice quadrata, fiet $x + a = \sqrt{aa + bb}$.

CO-

COROLLARIUM III.

96. EX qualibet æquatione quadraticà affectà $xx + ax = bb$ radix extrahi potest, si utrique membro addatur $\frac{1}{4}aa$, hoc est, quadratum ex semisse $\frac{1}{2}a$ quantitatis cognitæ secundi termini; tum utrinque quadrata radix extrahatur.

Sit æquatio $xx + ax = bb$

Adde $\frac{1}{4}aa$, fiet $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$

Radicem extrahe, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$

Et transponendo $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Omnia constant ex prima constitutione quadrati radicis binomiæ, & Coroll. I., & II.

Verùm exemplis aliquot illustranda hæc sunt, & confirmanda, antequam reliqua persequamur, quæ ad hanc reductionis regulam pertinent.

PROBLEMA XXXIV.

97. INvenire numerum x, cujus quadratum xx, adjecto decuplo ejusdem numeri, nempe $10x$ efficiat 39.

Suppositionem unicam problematis unica pariter æquatio exprimit:

$$xx + 10x = 39.$$

Hujus æquationis quadraticæ affectæ primum membrum continet quadratum imperfectum ex defectu tertii termini. Quadratum itaque ex semisse quantitatis cognitæ 10 secun-

 di

di termini $10x$ utrique membro addatur: erit

$$xx + 10x + 25 = 25 + 39$$
$$xx + 10x + 25 = 64$$

Extrahatur utrinque radix quadrata,

$$x + 5 = 8,$$

& transponendo $x = 8 - 5 = 3$ numerus quæsitus. Nam $xx + 10x = 9 + 30 = 39$.

PROBLEMA XXXV.

98. INvenire numerum x, qui cum dato numero $b = 156$ conficiat quadratum ipsius numeri inventi.

Suppositio unica $xx = x + b$

$$xx - x = b$$

Coefficiens secundi termini $-x$ est unitas, quæ semper subintelligitur, cujus semissis est $\frac{1}{2}$, ejusque quadratum $\frac{1}{4}$, quod utrique membro æquationis adjiciendum est;

$$xx - x + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + b = \tfrac{1}{4} + 156 = \tfrac{625}{4}$$

Radix $x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + b} = \sqrt{\frac{1}{4} + 156} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}$

$$x = \tfrac{25}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{26}{2} = 13$$

Quare $13 + 156 = 169$ quadratum numeri 13.

SCHOLION I.

99. REsolutio universalis problematis cujusvis peræque complectitur numeros integros, fractos, & surdos, quos de industria sæpe interseram, ut calculo radicalium Tyrones assuescant.

Sit rursum inveniendus numerus, qui cum 50 suum quadratum efficiat.

$$xx = x + 50$$
$$xx - x = 50$$
$$xx - x + \tfrac{1}{4} = 50 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{201}{4}$$
$$x - \tfrac{1}{2} = \sqrt{\tfrac{201}{4}}$$
$$x = \sqrt{\tfrac{201}{4}} + \tfrac{1}{2}$$

Hujus inventi numeri quadratus est $\sqrt{\frac{804}{16}} + \frac{202}{4}$, ut in adjecta formula apparet, hoc est, $\sqrt{\frac{201}{4}} + 50\frac{1}{2}$, quantum videlicet fit ex numero invento $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$ unà cum dato numero 50.

$$\begin{array}{l}
\sqrt{\tfrac{201}{4}} + \tfrac{1}{2} \\
\sqrt{\tfrac{201}{4}} + \tfrac{1}{2} \\
\hline
\tfrac{201}{4} + \sqrt{\tfrac{201}{16}} \\
\qquad + \sqrt{\tfrac{201}{16}} + \tfrac{1}{4} \\
\hline
\tfrac{201}{4} + 2\sqrt{\tfrac{201}{16}} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{201}{4} + \sqrt{\tfrac{804}{16}} + \tfrac{1}{4}
\end{array}$$

SCHOLION II.

100. SI maxima incognitæ quantitatis dimensio, seu potestas per cognitam aliquam quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eamdem dividi per Reg. V.

PROBLEMA XXXVI.

INvenire numerum x, cujus quadratum xx ter sumptum adjecto sexies eodem numero conficiat 72.

Suppositio unica $\quad 3xx + 6x = 72$

Utrinque dividendo per 3, erit $xx + 2x = 24$, & utrinque addendo quadratum semissis coefficientis 2 secundi termini, fiet $xx + 2x + 1 = 25$

$$x + 1 = 5$$

$$x = 5 - 1 = 4.$$

Quare $3xx + 6x = 48 + 24 = 72$.

PROBLEMA XXXVII.

101. NUmerum invenire, a cujus quadrato quinquies sumpto si subtrahatur idem numerus quater sumptus, residuum sit $= 105$.

Suppositio unica $5xx - 4x = 105$.

Dividatur tota æquatio per 5,

$$xx - \tfrac{4}{5}x = 21$$

Semissis coefficientis $\frac{4}{5}$ est $\frac{4}{10}$, cujus quadratum $\frac{16}{100}$ utrinque addendum

$$xx - \tfrac{4}{5}x + \frac{16}{100} = 21 + \frac{16}{100}$$

$$xx - \tfrac{4}{5}x + \frac{16}{100} = \frac{2116}{100}$$

Radix $\quad x - \frac{4}{10} = \frac{46}{10}$

$$x = \frac{46}{10} + \frac{4}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

Quare $5xx - 4x = 125 - 20 = 105$.

SCHO-

SCHOLION.

NOn rarò accidit, ut ultima resolutio problematis obtineatur per extractionem radicis semel iterumque repetitam.

PROBLEMA XXXVIII.

102. NUmerum invenire, cujus quadratum cum dato numero $a = 83232$ conficiat ipsius numeri inventi quadrato-quadratum.

Suppositio $\quad x^4 = xx + a$

$$x^4 - xx = a = 83232$$

Compleatur quadratum primi membri,

$$x^4 - xx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + a = 83232 + \tfrac{1}{4} = \frac{332929}{4}$$

Radix I. $x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + a} = \sqrt{\frac{332929}{4}} = \frac{577}{2}$

$$xx = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + a} = \tfrac{1}{2} + \frac{577}{2} = \frac{578}{2} = 289$$

Radix II. $x = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}} = \sqrt{289} = 17$.

Itaque numeri inventi 17 quadratum 289 cum dato numero 83232 efficit quadrato-quadratum 83521 numeri inventi 17.

OBSERVATIO XII.

103. DEmonstravimus Prop. III. cap. 1. n. 21. fieri quandoque posse propter defectum terminorum intermediorum, ut æquatio plu- Depressio æquationis.

plurium dimensionum ad gradum inferiorem deprimatur. Ita in proximè superiore exemplo æquatio quarti gradus $x^4 * - x^2 * = a$, quæ secundo, & quarto termino caret, poterit ad aliam secundi gradus deprimi. Fiat $x^2 = y$, & substituendo in æquatione illa y pro x^2, & y^2 pro x^4, prodibit loco ejus hæc alia

$$y^2 - y = a$$

$$y^2 - y + \tfrac{1}{4} = a + \tfrac{1}{4}$$

Radix I. $y - \tfrac{1}{2} = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}$

$$y = x^2 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}$$

Radix II. $x = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}}$

Hujusmodi verò artificium locum obtinet, quoties numeri dimensionum, quas in terminis æquationis habet incognita quantitas, per unum, eumdemque numerum dividi possunt. In hoc casu deprimitur æquatio, capiendo incognitam aliam, quæ adæquet eam potestatem incognitæ in æquatione contentæ, quam maximus eorum numerorum divisor ostendit, ut dictum est n. 21.

PROBLEMA XXXIX.

104. Numerum invenire, cujus cubus cum dato numero $a = 7526792$ conficiat sui cubi quadratum, vel sui quadrati cubum.

Suppositio $x^{3 \times 2}$, seu $x^6 = x^3 + a = x^3 + 7526792$

$$x^6 - x^3 = a$$

Nu-

Numeri dimensionum, quas in terminis æquationis habet incognita x per communem maximum divisorem 3 dividi possunt. Sumatur itaque alia incognita y, quæ adæquet potestatem x^3 incognitæ in æquatione contentæ, quam maximus divisor 3 ostendit. Fiat $y = x^3$; & $y^2 = x^6$.

Quamobrem $y^2 - y = a = 7526792$

$$y^2 - y + \tfrac{1}{4} = a + \tfrac{1}{4} = \frac{30107169}{4}$$

Radix $y - \tfrac{1}{2} = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}} = \frac{5487}{2}$

$$y = x^3 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{a + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} + \frac{5487}{2} = 2744$$

Radix $x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} + \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}} = \sqrt[3]{2744} = 14$.

Inventi numeri 14 cubus 2744 additus dato numero 7526792 conficit sui cubi quadratum 7529536.

Scholion.

Facilitati, & universalitati resolutionis magis consulitur in litterali calculo. Inventis valoribus in ultima æquatione substitui poterunt numeri, ut particularis resolutio eliciatur.

PROBLEMA XL.

105. Numerum x invenire, cujus quadrati multiplex quilibet, puta $5 = a$, hoc est

est, ax^2, unà cum ejusdem numeri potestate quarta, idest, $+x^4$ conflet datum numerum $535086 = b$.

Suppositio $x^4 + ax^2 = b$.

Sit $x^2 = y$; adeoque $x^4 = y^2$;

hinc
$$y^2 + ay = b$$
$$y^2 + ay + \tfrac{1}{4}aa = \tfrac{1}{4}aa + b$$
$$y + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + b}$$
$$y = x^2 = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + b}$$
$$x = \sqrt{-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + b}}$$

Substituantur jam litteris numeri hoc pacto.

$$\tfrac{1}{4}aa + b = \frac{25}{4} + 535086 = \frac{2140369}{4};$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}aa + b} = \frac{1463}{2};$$
$$-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + b} = -\tfrac{5}{2} + \frac{1463}{2} = \frac{1458}{2} = 729;$$
$$\sqrt{-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + b}} = \sqrt{729} = 27$$ numerus quæsitus.

Nam ejus quadratus 729 quinquies sumptus facit 3645, qui numerus cum 531441 potestate quarta inventi numeri 27 facit numerum datum 535086.

PROBLEMA XLI.

106. Numerum x invenire, cujus cubus x^3 cum ejusdem numeri potestate sexta x^6 faciat datum numerum $1291503906 = a$.

Sup-

Suppositio $x^6 + x^3 = a$; Sit $x^3 = y$; $x^6 = y^2$;

hinc
$$y^2 + y = a$$
$$y^2 + y + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + a$$
$$y + \tfrac{1}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + a}$$
$$y = x^3 = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + a}$$
$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + a}}$$

Substituantur numeri inventis valoribus,

$$\tfrac{1}{4} + a = \frac{5166015625}{4};$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4} + a} = \frac{71875}{2};$$
$$-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + a} = \frac{71874}{2} = 35937;$$
$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + a}} = \sqrt[3]{35937} = 33$$ numerus quæsitus.

PROPOSITIO.

107. Æ*Quationis quadraticæ affectæ formulæ quatuor, & earum resolutio universalior.*

Ostendimus jam Propos. III. cap. 1. æquationes omnes ejusdem gradus revocari ad formulas quasdam generales, quæ ex sola diversitate signorum $\pm$ inter se differunt.

Omnis æquatio per regulas jam traditas correcta, & reducta dicitur *Formula*; hoc est, generalis, & compendiaria expressio omnium æquationum ejusdem gradus, quæ habeant eumdem terminorum numerum, eamdemque signorum diversitatem.

Æqua-

Æquatio affecta secundi gradus habita ratione signorum $\pm$ ad quatuor hasce formulas reducitur.

$$xx+ax=b$$
$$xx-ax=b$$
$$xx-ax=-b$$
$$xx+ax=-b$$

Radix quadrati duplex semper est, negativa, & positiva. Sic radix quadrata aa est $+a$, & $-a$.

Hac de causa, si ab æquatione $xx-ax+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa-bb$ extrahenda sit radix quadratica, duplici signo $\pm$ radix utraque designari solet; $x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, adeoque $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$.

Hinc æquatio secundi gradus duplicem radicem, seu valorem habet, & duplicem solutionem admittit. Quin imo suo loco demonstrabimus æquationem cujuscunque gradus tot radices, seu diversos valores habere posse, quot sunt dimensiones ejus, & non plures.

Radix autem æquationis vocatur valor, quem in ea habet quantitas incognita.

Si valor incognitæ x fuerit positivus, radix dicitur vera, si negativus, dicitur falsa; sin verò valor incognitæ fuerit radix quantitatis negativæ, puta, $\sqrt{-5}$, radix dicitur imaginaria; quippe quadrati negativi nulla est radix, neque positiva, neque negativa.

Re-

Resolutio primæ formulæ.

Æquatio proposita $\left[\begin{array}{l} xx+ax=b \\ xx+6x=16 \end{array}\right.$

Æquatio completa $\left[\begin{array}{l} xx+ax+\frac{1}{4}aa=b+\frac{1}{4}aa \\ xx+6x+9=16+9=25 \end{array}\right.$

Radix prima vera $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}a=\sqrt{b+\frac{1}{4}aa} \\ x+3\ =5 \end{array}\right.$

Reductio $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{b+\frac{1}{4}aa} \\ x=-3\ +5=2 \end{array}\right.$

Radix secunda falsa $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}a=-\sqrt{b+\frac{1}{4}aa} \\ x+3\ =-5 \end{array}\right.$

Reductio $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}a-\sqrt{b+\frac{1}{4}aa} \\ x=-3-5=-8. \end{array}\right.$

Resolutio secundæ formulæ.

Æquatio proposita $\left[\begin{array}{l} xx-ax=b \\ xx-6x=16 \end{array}\right.$

Æquatio completa $\left[\begin{array}{l} xx-ax+\frac{1}{4}aa=b+\frac{1}{4}aa \\ xx-6x+9=25 \end{array}\right.$

Radix prima vera $\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}a=\sqrt{b+\frac{1}{4}aa} \\ x-3\ =5 \end{array}\right.$

Re-

Reductio
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}aa} \\ x = 3 + 5 = 8 \end{cases}$$

Radix secunda
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}a = -\sqrt{b + \frac{1}{4}aa} \\ x - 3 = -5 \end{cases}$$

Reductio
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}aa} \\ x = 3 - 5 = -2. \end{cases}$$

Resolutio tertiae formulae.

Æquatio proposita
$$\begin{cases} xx - ax = -b \\ xx - 6x = -8 \end{cases}$$

Æquatio completa
$$\begin{cases} xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - b \\ xx - 6x + 9 = 1 \end{cases}$$

Radix prima
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \\ x - 3 = 1 \end{cases}$$

Reductio
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \\ x = 4 \end{cases}$$

Radix secunda
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}a = -\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \\ x - 3 = -1 \end{cases}$$

Reductio
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \\ x = 2. \end{cases}$$

Resolutio quartae formulae.

Æquatio proposita
$$\begin{cases} xx + ax = -b \\ xx + 6x = -8 \end{cases}$$

Æquatio completa
$$\begin{cases} xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - b \\ xx + 6x + 9 = 1 \end{cases}$$

Radix prima
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \\ x + 3 = 1 \end{cases}$$

Reductio
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \\ x = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

Radix secunda
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}a = -\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \\ x + 3 = -1 \end{cases}$$

Reductio
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b} \\ x = -3 - 1 = -4. \end{cases}$$

Primae, & secundae formulae radix una est positiva, & altera negativa.
Tertiae formulae utraque radix positiva est;
Quartae utraque est negativa.

Qua verò ratione interdum propositae formulae radices imaginarias contineant, latiùs alibi dicendum erit in Analysi aequationum.

PROBLEMA XLII.

108. Numerum x invenire, ad quem quadratus ipsius auctus dato numero $a = 110$ proportionem habeat datam $27 : 1 :: b : c$.

Suppositio unica $xx + a : x :: b : c$.

Multiplicatis extremis, & mediis oritur æquatio $cxx + ca = bx$

& transponendo $cxx - bx = -ca$

& dividendo $xx - \frac{b}{c}x = -a$

Hæc æquatio ad tertiam formulam pertinet, quæ duas admittit radices positivas.

Addito itaque utrinque quadrato semissis coefficientis secundi termini, fiet

$$xx - \frac{b}{c}x + \frac{bb}{4cc} = \frac{bb}{4cc} - a$$

Radix utraque $x - \frac{b}{2c} = \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} - a}$

& per reductionem $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} - a}$

hoc est, in primo casu $x = 22$

in secundo casu $x = 5$.

Hæc æquatio duplicem habet radicem 22, & 5, quarum utraque problemati proposito satisfaciet. Nam quadratus numerus 484 inventæ radicis 22 auctus numero 110 efficit numerum 594, qui ad 22 eamdem proportionem habet, quam 27 ad 1. Rursum quadratus

tus numerus 25 inventæ radicis 5 auctus numero 110 fit 135, qui numerus ad 5 proportionem eamdem habet, quam 27 ad 1.

PROBLEMA XLIII.

109. Numerum x invenire, cujus quadratus xx auctus dato numero $a = 8$, hoc est, $xx + a$, si ducatur in eumdem quadratum mulctatum alio numero dato $b = 3$, idest, $xx - b$, producat datum numerum quemcunque, puta, $c = 6942$.

Suppositio unica $\overline{xx + a} \times \overline{xx - b} = c$

hoc est, $x^4 + \overline{a - b}\,xx - ab = c$

$x^4 + \overline{a - b}\,xx = ab + c$.

Si $a > b$, æquatio ad primam formulam pertinet, duasque habet radices, negativam unam, positivam alteram, quam substitutis valoribus invenies esse 9. Nam ejus quadratus 81 auctus octonario facit 89, & mulctatus ternario, 78; fitque ex 89 in 78 numerus datus 6942.

Si $a < b$, æquatio ad secundam formulam pertinebit, duasque pariter radices habebit, positivam unam, negativam alteram.

110. Huc tandem recidit universalis Newtoni Regula, ad cujus similitudinem æquationes omnes quadraticæ ad normam simplicium reduci possunt.

Et sic universaliter: si sit $xx = .px.q$, *erit* $x = .\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp.q}$. *Ubi* $\frac{1}{2}p$ & q *iisdem signis, ac* p & q *in æquatione priori afficienda sunt; sed* $\frac{1}{4}pp$ *semper affirmativè ponendum: estque hoc exemplum Regula, ad cujus similitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam simplicium reduci possunt. E. g. Proposita æquatione* $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, *ad extrahendam radicem* y, *confer* $\frac{2xx}{a}$ *cum* p, & xx *cum* q, *hoc est, scribe* $\frac{xx}{a}$ *pro* $\frac{1}{2}p$, & $\frac{x^4}{aa} + xx$ *pro* $\frac{1}{4}pp:q$, *atque orietur* $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, *vel* $y = \frac{xx}{aa} - \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. *Eodem modo æquatio* $yy = ay - 2cy + aa - cc$, *conferendo* $a - 2c$ *cum* p, & $aa - cc$ *cum* q, *dabit* $y = \frac{1}{2}a - c + \sqrt{\frac{1}{4}aa - ac}$. *Quin etiam æquatio quadrato-quadratica* $x^4 = -aaxx + ab^3$, *cujus termini impares desunt, ope hujus regulæ evadit* $xx = -\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}$; & *extracta iterum radice,* $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}}$; & *sic in aliis.*

SYNOPSIS REGULARUM.

III. Quos hactenus in æquatione solitaria docuimus reductionis modos, non erit abs re omnes unico exemplo complecti, & quasi sub oculos ponere, priusquam progrediar ad comparationem plurium æquationum inter se, earumque transformationem.

Proponatur æquatio

$$\sqrt{\frac{zz + 3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz - 3aa}{4}} = \sqrt{\frac{azz}{b}}.$$

I. Quia eorum, quæ æqualia sunt, æqualia quoque sunt quadrata, ad tollendas quantitates surdas, seu radicales Regula quarta jubet, ut pars utraque æquationis multiplicetur in se quadratè, & prodibit

$$\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}} = \frac{azz}{b}.$$

II. Per Regulam primam addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$, & subtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo scilicet quantitates hasce in alteram partem sub contrario signo, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$ sola ex una parte, fietque

$$\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} = \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$$

III. Quo facto multiplicetur rursus utraque pars æquationis in se quadratè, ut evanescat signum radicale, & habebitur

$$\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} = \frac{z^4 - 9a^4}{4}$$

IV. Jam verò, si per Regulam primam utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo, ac subtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm signis, erit

$$\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} = \frac{9a^4}{4}$$

V. Porro ut deleantur fractiones, opus est Regulà secundà & tertià, nempe reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto, si utrinque per eumdem multiplicetur, ipsum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur

$$4abz^4 - 4aaz^4 = 9a^4bb$$

Dividatur jam ubique per a, hoc est, a ubique deleatur: prodibit

$$4bz^4 - 4az^4 = 9a^3bb$$

VI. Quo facto, quia maxima incognitæ quantitatis dimensio z^4 per cognitam quantitatem $4b-4a$ multiplicatur, per Reg. V. debet tota æquatio per eamdem dividi, ut habeatur z^4 ex unica tantùm parte; eritque

$$z^4 = \frac{9a^3bb}{4b-4a}$$

VII. Denique si per Reg. VII. utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur

$$zz = \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$$

&

& si denuo utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$$

COROLLARIUM.

112. EX quibus patet, reductionem per additionem, & subtractionem institui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem rite ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones, tum quantitates surdas; & reductionem per divisionem, tam ad deprimendas dimensiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam, & simplicissimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis ad obtinendam æquationem ex minimis terminis constantem. Præterea omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæsitam ex data æquatione inveniendam conducunt.

Suntque hæ Regulæ, pergit Newtonus, *pro concinnanda æquatione solitaria, quarum usum cum Analysta satis perspexerit, ita ut æquationem quamcunque propositam secundùm quamlibet litterarum in ea complexarum disponere noverit; & ejusdem litteræ, si ea unius sit dimensionis, aut maximæ potestatis ejus, si plurium, valorem elicere: haud difficilem sentiet comparationem plurium æquationum inter se, quam pergo jam docere.*

CA-

CAPUT IV.

Synopsis.

PLurium æquationum in unam transformatio. Modi omnes exterminandi quantitatem incognitam, unico exemplo comprehensi. Solutiones quæstionum eò magis expeditæ, & artificiosæ, quò pauciores incognitæ sub initio ponuntur. Quantum Analysis recentiorum ultra Algebram veterum provecta fuerit. Additione, vel subductione æquationum inter se interdum potestates imperfectæ complentur. Qua ratione Analysis ad Physices problemata transferatur, ac via æquationi aperiatur.

De duabus pluribusve æquationibus in unam transformandis, ut incognitæ quantitates exterminentur.

113\. *Cum in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes istæ (duæ per vices, si modò sint plures duabus) sunt ita connectendæ, ut una ex incognitis quantitatibus per singulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus* $2x=y+5$, *&* $x=y+2$, *demendo æqualia ex æqualibus, prodibit* $x=3$. *Et sciendum est, quòd per quamlibet æquationem una*

quantitas incognita potest tolli; atque adeo, cum tot sunt æquationes, quot quantitates incognitæ, omnes possunt ad unam denique reduci, in qua unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ sint unâ plures, quàm æquationes habentur, tum in æquatione ultimò resultante duæ manebunt quantitates incognitæ; & si sint duabus plures, quàm æquationes habentur, tum in æquatione ultimò resultante manebunt tres; & sic præterea.

Possunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantùm æquationes fortasse tolli: ut, si sit $ax-by=ab-az$, *&* $bx+by=bb+az$, *tum æqualibus ad æqualia additis, prodibit* $ax+bx=ab+bb$, *exterminatis utrisque* y *&* z. *Sed ejusmodi casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere, vel calculum erroneum esse, aut non satis artificiosum. Modus autem, quo una quantitas incognita per singulas æquationes tollatur, ex sequentibus patebit.*

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

Cum quantitas tollenda unius est tantùm dimensionis in utraque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus est, & alter valor statuendus æqualis alteri.

Sic positis $a+x=b+y$, *&* $2x+y=3b$, *ut exterminetur* y, *æquatio prima dabit* $a+x-b=y$, *& secunda dabit* $3b-2x=y$. *Est ergo*

ergo $a+x-b=3b-2x$, *sive ordinando* $x = \frac{4b-a}{3}$.

Atque ita $2x=y$, & $5+x=y$ *dant* $2x=5+x$, *seu* $x=5$.

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ *dant* $\frac{ax-ab}{2b}(=y)=\frac{bb}{x}$, *sive ordinando* $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{2yy}{c}=2aa$ *tollendo* x, *dant* $\frac{aby+aab}{bb-ay}(=x)=\frac{2aac-ayy}{bc}$; & *reducendo* $y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0$.

Denique $x+y-z=0$, & $ay=xz$ *tollendo* z, *dant* $x+y(=z)=\frac{ay}{x}$, *sive* $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur subducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo residuum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo tolle $3b-2x$ *ab* $a+x-b$, & *manebit* $a+3x-4b=0$, *sive* $x=\frac{4b-a}{3}$.

Ex-

Exterminatio quantitatis incognitæ substituendo pro ea valorem suum.

CUm *in altera saltem æquatione, tollenda quantitas unius tantùm dimensionis existit, valor ejus in ea quærendus est; & pro se in æquationem alteram substituendus.*

Sic propositis $xyy=b^3$, & $xx+yy=by-ax$; *ut exterminetur* x, *prima dabit* $\frac{b^3}{yy}=x$. *Quare in secundam substituo* $\frac{b^3}{yy}$ *pro* x, & *prodit* $\frac{b^6}{y^4}+yy=by-\frac{ab^3}{yy}$; *ac reducendo* $y^6-by^5+ab^3yy+b^6=0$.

Propositis autem $ayy+aay=z^3$, & $yz-ay=az$, *ut* y *tollatur, secunda dabit* $y=\frac{az}{z-a}$. *Quare pro* y *substituo* $\frac{az}{z-a}$ *in primam, proditque* $\frac{a^3z}{zz-2az+aa}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$; & *reducendo* $z^4-2az^3+aazz-2a^3z+a^4=0$.

Pari modo propositis $\frac{xy}{c}=z$, & $cy+zx=cc$, *ad* z *tollendum, pro eo substituo* $\frac{xy}{c}$ *in æquationem secundam*, & *prodit* $cy+\frac{xxy}{c}=cc$.

Cæterùm qui in hujusmodi computationibus exer-

exercitatus fuerit ſæpenumero contractiores modos percipiet, quibus incognita quantitas exterminari poſſit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$, & $x = \frac{az}{x-b}$, *ſi æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia* $axx = abb$, *ſive* $x = b$. *Sed caſus ejuſmodi particulares ſtudioſis proprio marte, cum res tulerit, inveſtigandos linquo.*

Transformatio equationum.

114. Artificium analyticum, quo duæ pluresve æquationes in unam transformentur, adeo latè patet, & ſcitu neceſſarium eſt, ut quæ hoc loco a Newtono preſsè traduntur, ea latiùs obſervationibus ſint, & exemplis enucleanda. Novitas enim, & copia præceptorum impedimento ſunt, quò minùs ſingula diſtinctè percipiant Tyrones, niſi Regulis propemodum ſingulis accedat exemplorum apta ſeries, quibus memoria juvetur, eorumque aſſiduitate præceptis omnibus potior illa ſolvendorum problematum facilitas comparetur.

Diximus Propoſ. II. problematis determinati hoc veluti criterium eſſe, cum numerus datorum a ſe mutuò non dependentium adæquat incognitorum numerum.

Oſtendimus præterea Propoſ. III. in problemate determinato tot æquationes inveniri oportere, ſtatum quæſtionis comprehendentes, quot incognitæ quantitates occurrunt, iiſque inventis dandam operam, ut ex omnibus una deducatur æquatio, quæ unicam dumtaxat, exterminatis reliquis, contineat incognitam quantitatem, cujus valor per ſolas quantitates cognitas expreſſus tandem innoteſcat. Exterminatio autem quantitatis incognitæ duplici potiſſimum via obtinetur, vel per æqualitatem, vel per ſubſtitutionem valoris ſui; interdum etiam æqualia ab æqualibus ſubtrahendo; vel æqualia æqualibus addendo, aut multiplicando, uti obvia obſervatio, cum res tulerit, cuique mediocriter exercitato ſuggeret. Hos omnes modos hoc primo exemplo comprehendam.

PROBLEMA XLIV.

115. Datis ſummà duorum numerorum, & eorundem differentià invenire numeros.

Vocetur numerorum ſumma $a = 100$: differentia eorundem $b = 40$: numerus major z, minor y.

Quia in problemate duæ occurrunt quantitates incognitæ, duæ pariter inveniendæ ſunt æquationes ex datis ſuppoſitionibus problematis.

Cum verò prima ſuppoſitio id poſtulet, ut ſumma numerorum z, & y ſit $= a$, ſecunda ſuppoſitio, ut differentia, quæ eſt inter majorem z, & minorem y, ſit $= b$: ex illa quidem deducetur æquatio $z + y = a$; ex iſta verò elicietur hæc alia $z - y = b$; vel $z = y + b$, ſi minori y adjiciam differentiam; vel $z - b = y$, ſi a majore z demam differentiam.

Quæ-

Quævis pro libito ſeligi poteſt: hanc ultimam arripio. Quare hunc progreſſum, ac veluti præparationem oculis ſubjicio.

Suppoſitio prima $z+y=a$. Suppoſitio ſecunda $z-b=y$.

MODUS I.

Exterminandi quantitatem incognitam per æqualitatem valorum ejus.

QUæratur in utraque æquatione valor alterutrius incognitæ, puta, z. Prima dabit $z=a-y$: ſecunda $z=y+b$; tum per æqualitatem valorum ejuſdem z duæ æquationes in unicam finalem transformentur $a-y=y+b$; & tranſponendo, ac dividendo invenietur $y=\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; ſubſtitutoque hoc valore loco incognitæ y in prima æquatione $z=a-y$, deducetur valor alterius incognitæ $z=a-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, hoc eſt, $z=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

MODUS II.

Exterminandi quantitatem incognitam per ſubſtitutionem valoris ſui.

SIt rurſum $z+y=a$; $z-b=y$. In alterutra tantùm æquatione, puta, $z+y=a$, quæratur valor unius incognitæ z, quam exterminare aggrederis, & fiet $z=a-y$: valor z in æquationem alteram ſubſtituendus. Quare ſecunda æquatio in hanc finalem transformabitur $a-y-b=y$; & tranſponendo, $a-b=2y$; & dividendo, $\frac{a-b}{2}=y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; ſubſtitutoque hoc valore loco incognitæ y in æquatione $z=a-y$, erit $z=a-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

MODUS III.

Per additionem.

SUppoſitiones, ſeu æquationes $\begin{matrix} z+y=a \\ z-y=b \end{matrix}$ addantur, ut evaneſcat incognita y: erit $2z=a+b$; adeoque $z=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. Subſtituatur hic valor in alterutra ex duabus primis æquationibus: reperietur $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.

MODUS IV.

Per ſubtractionem.

VEl ſubtrahatur, ſi libet, membrum $z-y$ ſecundæ æquationis a membro $z+y$ primæ, & alterum pariter b ab altero a: evaneſcet z, & habebitur nova finalis æquatio $2y=a-b$; adeoque $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; ſubſtitutoque hoc valore in alterutra ex duabus primis æquationibus, invenietur $z=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

OBSERVATIO XIII.

116. Non semper necesse est, quot sunt quantitates incognitæ, totidem eas diversis litteris nominare, totidemque æquationes ex suppositionibus elicere; sed sæpe licet pauciores usurpare litteras, paucioresque æquationes elicere ope obvii discursus, in quo nonnisi veritates faciles, notæque supponantur, quas meritò vocare licet principia; puta, si fuerint duæ quantitates quæsitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x, major rectiùs dicetur $3x$, quàm y; Paucis: si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, inquit Wolffius, aut aliunde tanquam cognitæ supponi possunt, eas quoque in denominatione exprimi consultum est. Res constabit ex ipso processu.

Artificium denominādi.

Ut autem jam nunc intelligas, quantum brevitatis afferat artificium denominandi quantitates incognitas per relationem ad cognitas, quando id fieri potest in ipso aditu problematis, præstat quæstionem eamdem pluribus versare modis.

117. Datum numerum $100 = a$ dividere in duas partes se mutuò superantes in dato excessu $40 = b$.

Vel duos numeros invenire, quorum excessus sit datus, & data summa.

Si minor numerus vocetur x, major erit $a - x$; perspicuum est enim, si a summa duorum numerorum subtrahatur minor, residuum fore majorem numerum. Hæc autem denominatio majoris numeri incogniti per relationem ad summam cognitam, implet conditionem primam problematis, nempe quòd summa numerorum quæsitorum æqualis esse debeat numero dato, atque adeo æquivalet uni æquationi. Superest jam elicienda æquatio altera ex secunda suppositione problematis, videlicet quòd major numerus $a - x$ excedere debeat minorem x differentià b; atque hinc $x + b = a - x$; adeoque $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ minor;

$a - x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ major.

Sit rursus minor x: ergo major designari poterit per $x + b$. Nam differentia data inter majorem numerum, & minorem est b: quare, additā differentià istà minori numero x, fiet numerus major $x + b$. In hac denominatione majoris numeri quæsiti per relationem ad cognitam differentiam, fit satis secundæ conditioni problematis. Jubet autem problema summam numerorum quæsitorum æqualem esse debere numero dato a; hinc æquatio $x + x + b = a$; adeoque $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ minor;

$x + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ major.

Quòd si statuamus majorem numerum esse x, minor erit vel $x - b$, vel $a - x$; & æquatio finalis, quæ omnes problematis conditiones includeret, in primo casu esset $x + x - b = a$: in secundo casu $a - x + b = x$ &c.

Scholion I.

Animadvertis, opinor, in tam vario, multiplicique denominandi incognitas quantitates artificio, æquationem ultimam semper desinere in fractionem. Quòd si resolutio universalis immunis ab omni fractione multò commodior, aut concinnior videatur, satis erit, si differentia data vocetur $2b$, & summa data $2a$.

Scholion II.

118. Si exhaustis omnibus problematis conditionibus non inveniantur tot æquationes, quot incognitæ quantitates occurrunt, tum indicio erit in problemate non omnes appositas esse conditiones, quæ ad determinationem ejus requiruntur; & propterea resolvi posse problema infinitis modis diversis, ut alibi ostendam.

Ita, si quærantur duo numeri, quorum summa tantùm sit data, problema erit indeterminatum. Nam propter duas incognitas quantitates, quæ in hoc problemate occurrunt, duæ etiam inveniendæ essent æquationes, cum tamen propter unicam appositam conditionem, unica tantùm inveniri possit æquatio $x+y=a$.

Co-

Corollarium, et Principium Generale.

119. In formula universalis resolutionis illud usuvenire multò ante monuimus, ut vel incidamus in theoremata, quæ ex Geometriæ principiis interdum demonstrantur; vel veritates aliæ in lucem eruantur, quas meritò appellare possis principia; ex. c. in resolutione generali hujus problematis, confer duas postremas æquationes, quæ valorem incognitarum exhibent:

$$y=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b;$$
$$z=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b.$$

Istæ continent theorema geometricum, quod pariter in Trigonometria demonstratur. Datis summà, & differentià duarum quantitatum, erit quantitas major aggregatum ex semisumma duarum, & earundem semidifferentià $z=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b$, quantitas minor erit differentia inter semisummam, & semidifferentiam earundem, $y=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b$.

Corollarium II.

120. Hoc theorema maximo erit usui in denominatione duarum etiam quantitatum incognitarum, quas in calculo analytico tanquam datas fingimus. Nam sæpe commodior erit denominatio, si duarum incognitarum quantitatum semisumma immediatè dicatur x,

& se-

& semidifferentia y; atque hinc quantitas major $x+y$, minor $x-y$, quàm ut ipsa quantitas major x, & minor y vocetur. Sic brevior evadit calculus, idemque facilior, ut sequentibus exemplis constabit.

PROBLEMA XLV.

121. Datis summà $100=a$ duarum quantitatum, & earundem facto $2400=b$, invenire numeros.

Sit major quæsitus x, minor y.

Suppositio prima	Suppositio secunda
$x+y=a$.	$xy=b$.

Exterminetur alterutra ex incognitis, puta, y per æqualitatem valorum ejus hoc pacto. Quæratur in utraque æquatione valor ejusdem y, & ex prima prodibit $y=a-x$, & ex secunda $y=\frac{b}{x}$; tum facta æquatione valorum, erit $a-x=\frac{b}{x}$; & multiplicando, $ax-xx=b$; & transponendo, ut maxima potestas incognitæ evadat positiva, $xx-ax=-b$; & per reductionem, $x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}=50+10=60$, & $y=a-x=100-60=40$.

Aliter.

Exterminetur alterutra ex incognitis, puta, y per substitutionem valoris ejusdem. Quæratur itaque in una ex duabus æquationibus, puta in secunda, valor $y=\frac{b}{x}$, qui loco ejusdem y substituatur in prima, & fiat $x+\frac{b}{x}=a$; & per reductionem invenies, ut prius, $x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}$ &c.

Aliter.

Ex Generali Principio, & Coroll. Probl. I. demonstravimus hoc theorema, quod ad denominandas quantitates etiam incognitas, minuendasque æquationes maximè conducit. Si duæ fuerint quantitates inæquales, major erit æqualis summæ earum, plus semissi earundem differentiæ, & minor erit æqualis earum summæ, minùs semissi earundem differentiæ.

Duarum quantitatum summa cognita vocetur $2a$, & $2z$ earum differentia incognita. Has seligo expressiones $2a$, & $2z$, ne earum semisses in fractiones desinant, ut annotavimus Scholio I. Factum earundem sit b. Itaque

Semidifferentia $=z$
Quantitas major $=a+z$
Quantitas minor $=a-z$.

Utriusque incognitæ denominatio per relationem ad summam cognitam implet conditionem unam problematis, quòd summa quæsitarum æqualis sit numero dato, adeoque æquivalet uni æquationi. Reliquum est, ut æquatio altera

tera eliciatur ex secunda suppositione problematis.

Multiplicetur, ut jubet problema, $a+z$ in $a-z$: factum erit $aa-zz=b$ per conditionem problematis; & transponendo, $aa-b=zz$; & per extractionem radicis,

$z=\sqrt{aa-b}=\sqrt{2500-2400}=\sqrt{100}=10$: hinc quantitas major $a+z=50+10=60$; quantitas minor $a-z=50-10=40$.

Regula.

HÆc ultima æquatio $z=\sqrt{aa-b}$ canonem, seu regulam generalem continet resolvendorum similium problematum. A quadrato semisummæ duarum quantitatum subtrahatur factum earundem: ex residuo extrahatur radix, quæ erit semidifferentia earundem.

Corollarium.

COnsideretur æquatio penultima $aa-b=zz$, quæ sic transponitur $aa=b+zz$: hæc continet theorema geometricum, quod lib. 2. prop. 5. ab Euclide demonstratur. Cum enim a sit dimidium totius $2a$, & præterea z sit differentia partis æqualis ab inæquali, & b sit factum, seu rectangulum partium inæqualium, hæc æquatio $aa=b+zz$ exhibet hoc theorema. Si totum dividatur in duas partes æquales, & in duas inæquales, quadratum partis æqualis aa æquale est rectangulo inæqualium b unà cum quadrato zz differentiæ partis æqualis ab inæquali.

Scholion.

PAtet itaque, inquit Wolffius, quòd sæpius casu in theoremata incidamus, dum problemata algebraica resolvimus. Regulas verò quilibet proprio marte ex ultima æquatione eruere poterit.

OBSERVATIO XIV.

122. QUamvis in ipso adhuc artis analyticæ vestibulo hæreamus, tamen, quantùm recentiorum Analysis ultra Algebram veterum provecta fuerit, luculenter constabit ex sequenti, quod subjicio, problemate P. Clavii, qui censuit resolvi hoc nequaquam posse sine subsidio Geometriæ; aitque cap. 31. Alg. probl. 58.: *ex hoc ænigmate facilè intelligitur, eum, qui quæstiones per Algebram solvere vult, debere optimè esse exercitatum in Geometriæ scientia. Hoc enim ænigma ab eo, qui Geometriam ignorat, vix, aut nullo modo solvetur*. At ex præjactis reductionum regulis, quàm facilis, & expedita resolutio sit, palam fiet. Analysis Recentiorum.

PRO-

PROBLEMA XLVI.

123. Duo ſocii habent duos numeros aureorum, quorum ſumma a ſummâ quadratorum ex ipſis procreatorum ſubtracta, relinquit 78; addita verò ad numerum ex eorum multiplicatione productum facit 39. Quæruntur duo numeri.

Quò facilior evadat calculus, artificium ſequamur oportet, quod præſcribitur in Coroll. I. Probl. I., ejuſque Principio Generali in denominandis duabus incognitis quantitatibus.

Vocetur itaque $2z$ ſumma incognita duorum numerorum, & $2y$ eorundem differentia: major quæſitus erit $z+y$, & minor $z-y$. Sit $39=b$; ejuſque duplum $78=2b$.

Suppositio I.

Summa $2z$ ſubducta a ſumma $2zz+2yy$ quadratorum $zz+2zy+yy$, & $zz-2zy+yy$ utriuſque numeri $z+y$, & $z-y$, reſiduum exhibet $2b$ ex prima conditione problematis. Hinc æquatio $2zz+2yy-2z=2b$; & dividendo per 2, fit $zz+yy-z=b$.

Suppositio II.

Summa $2z$ addita producto $zz-yy$ ex multiplicatione numeri $z+y$ per alium $z-y$, dat novam ſummam b ex ſecunda conditione pro-

problematis. Quare ſecunda æquatio obtinetur $zz-yy+2z=b$.

Modus autem exterminandi incognitam y facilè occurrit, ſi modò duæ æquationes ſimul addantur: quo facto prodibit æquatio, quæ omnes problematis ſuppoſitiones includens, unicam contineat incognitam z,

hoc eſt, $2zz+z=2b$

& dividendo per 2, $zz+\frac{1}{2}z=b$

& utrinque per Reg. VII. addendo quadratum $\frac{1}{16}$ fractionis $\frac{1}{4}$, quæ eſt ſemiſſis alterius fractionis $\frac{1}{2}$, quæ multiplicat incognitam z, fiet

$$zz+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{16}=b+\tfrac{1}{16}$$

& extracta radice, $z+\frac{1}{4}=\sqrt{b+\frac{1}{16}}$

& tranſponendo, $z=-\frac{1}{4}+\sqrt{b+\frac{1}{16}}=6$.

Altera verò incognita y deprehendetur, ſumendo æquationem $zz+yy-z=b$, ſeu ejus tranſpoſitam $yy=b+z-zz$; ſubſtitutoque valore invento quantitatis z, ejuſdemque quadrati, invenietur $y=\sqrt{b+z-zz}$ $=\sqrt{39+6-36}=3$.

Quare numerus major $z+y=6+3=9$;
numerus minor $z-y=6-3=3$.

Horum ſumma 12 ſubducta a ſumma 90 quadratorum 81, & 9 relinquit 78: addita verò ad numerum 27 ex eorum multiplicatione productum, dat ſummam 39.

PRO-

PROBLEMA XLVII.

124. *Datà duorum numerorum summà* a, *&* *differentià quadratorum* b, *invenire numeros*.

Ex sexdecim problematis arithmeticis, quæ a Newtono proponuntur, hoc est ordine primum, & his verbis ab eodem resolvitur.

Sit eorum minor x, *& erit alter* a — x, *eorumque quadrata* xx, *&* aa — 2ax + xx: *quorum differentia* aa — 2ax *supponitur* b. *Est itaque* aa — 2ax = b, *indeque per reductionem* aa — b = 2ax, *seu* $\frac{aa - b}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} = x$.

Ex. gr. *si summa numerorum*, *seu* a *sit* 8, *& quadratorum differentia*, *seu* b, 16, *erit* $\frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} = 4 - 1 = 3 = x$, *&* a — x = 5. *Quare numeri sunt* 3 *&* 5.

Aliter.

Sit major y, minor x.

Suppositio prima	Suppositio secunda
$y + x = a$.	$y^2 - x^2 = b$.

Ut exterminetur alterutra ex incognitis, puta, y, inquirendus ejusdem valor in utraque æquatione. Prima dabit $y = a - x$: secunda $y^2 = b + x^2$.

Verùm, ut valor unius statuatur alteri æqualis, opus est, ut æquatio prima attollatur ad potestatem quadraticam, $y^2 = aa - 2ax + xx$: quo facto, per æqualitatem valorum ejusdem yy oritur æquatio finalis $aa - 2ax + xx = b + x^2$; & transponendo, ac dividendo, $\frac{aa - b}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} = x$; & substituendo inventum valorem loco incognitæ x in æquatione prima, erit $y = a - x = a - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}a + \frac{b}{2a} = 4 + 1 = 5$.

Aliter.

Quantitatum quæsitarum semidifferentia vocetur y: quare per Coroll. I. Probl. XXXIII., ejusque Principium Generale, erit

Quantitas major $= \frac{1}{2}a + y$;
Quantitas minor $= \frac{1}{2}a - y$.
Quadratum majoris $= \frac{1}{4}aa + ay + yy$
Quadratum minoris $= \frac{1}{4}aa - ay + yy$
Differentia horum quadratorum $2ay = b$ per conditionem problematis; adeoque $y = \frac{b}{2a}$: hinc

Quantitas major $\frac{1}{2}a + y = \frac{1}{2}a + \frac{b}{2a} = 4 + 1 = 5$;

Quantitas minor $\frac{1}{2}a - y = \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} = 4 - 1 = 3$.

PROBLEMA XLVIII.

125. INvenire duos numeros x, & y, quorum data sit summa quadratorum $20 = 2aa$, datumque, quod ex eorum multiplicatione producitur, $8 = bb$.

Suppositiones.

$$x^2 + y^2 = 2a^2; \quad xy = b^2.$$

Exterminetur alterutra ex incognitis, puta, y per æqualitatem valorum ipsius. Æquatio prima dabit $y^2 = 2a^2 - x^2$; secunda $y = \frac{b^2}{x}$; adeoque $y^2 = \frac{b^4}{xx}$: hinc $2a^2 - x^2 = \frac{b^4}{x^2}$

& multiplicando, $2aaxx - x^4 = b^4$.

& transponendo, $x^4 - 2aaxx = -b^4$

& per Reg. VII. $x^4 - 2aaxx + a^4 = a^4 - b^4$

$$x^4 - 2aa = \sqrt{a^4 - b^4}$$

$$x^2 = aa + \sqrt{a^4 - b^4}$$

$$x = \sqrt{aa + \sqrt{a^4 - b^4}} \text{ \&c.}$$

Aliter.

Exterminetur incognita y per substitutionem valoris ejus. Quamobrem multiplico prioris æquationis $x^2 + y^2 = 2a^2$ terminos omnes per

per x^2, ut loco ejus habeatur hæc alia $x^4 + y^2x^2 = 2a^2x^2$; & quoniam in secunda æquatione habetur $xy = b^2$, quadrando ejus utramque partem, fiet $y^2x^2 = b^4$. Unde, si in altera illa æquatione $x^4 + y^2x^2 = 2a^2x^2$ loco termini x^2y^2 ponatur valor ejus inventus b^4, evadet illa $x^4 + b^4 = 2a^2x^2$;

& per reductionem, $x^4 - 2a^2x^2 = -b^4$

$$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = a^4 - b^4$$

$$x^2 - a^2 = \sqrt{a^4 - b^4}$$

$$x^2 = a^2 + \sqrt{a^4 - b^4} = 10 + \sqrt{100 - 64} = 16.$$

$$x = \sqrt{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}} = \sqrt{16} = 4$$

$$y = \frac{b}{x} = \frac{8}{4} = 2.$$

Scholion.

ILlud verissimè dictum a Newtono intelliges, eum, qui in hujusmodi computationibus exercitatus fuerit, contractiores sæpe modos invenire posse, quibus incognita quantitas exterminetur: quod ex hoc ipso problemate, aliisque constabit.

Aliter.

Quoniam in secunda æquatione habetur $xy = b^2$, duplicando utramque partem, erit $2xy = 2b^2$. Hæc æquatio addita primæ æquationi $x^2 + y^2 = 2a^2$, tum ab eadem subducta, in in utroque casu perficiet quadratum, nempe

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2a^2 + 2b^2,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 2a^2 - 2b^2;$$

unde extrahendo quadratas radices ex partibus utriusque æquationis, erit

$$x + y = \sqrt{2a^2 + 2b^2},$$
$$x - y = \sqrt{2a^2 - 2b^2}:$$

Ut evanescat y, addatur utraque æquatio: prodibit

$$2x = \sqrt{2a^2 + 2b^2} + \sqrt{2a^2 - 2b^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2} + \sqrt{2a^2 - 2b^2}}{2}$$

hoc est, $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}} = 4:$

Ut evanescat x, subducatur æquatio secunda a prima: fiet

$$2y = \sqrt{2a^2 + 2b^2} - \sqrt{2a^2 - 2b^2}$$

hoc est, $y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}} = 2.$

PROBLEMA XLIX.

126. Datà summà duorum numerorum $18 = 2a$, & summà quadratorum $164 = 2b$, quæruntur numeri.

Differentia quæsitorum sit $2y$: ergo major $a + y$, minor $a - y$. Invenies $2aa + 2yy = 2b$;

$= 2b$; & per reductionem $y = \sqrt{b - aa} = \sqrt{82 - 81} = 1$: ergo $a + y = 9 + 1 = 10$

$a - y = 9 - 1 = 8$.

Vel, si duorum numerorum differentia $2 = 2a$ sit cognita, & summa quadratorum $164 = 2b$, invenies eamdem æquationem $y = \sqrt{b - aa}$ &c.

PROBLEMA L.

Invenire duos numeros x, & y, ita ut data sit tum summa ipsorum, cum summa cuborum, qui ex illis oriuntur.

Suppositiones

$$x + y = a; \qquad x^3 + y^3 = ab^2.$$

Exterminetur incognita $y = a - x$, attollendo utramque partem æquationis hujus ad cubum; & substituendo inventum valorem loco y^3 in secunda æquatione, factaque reductione invenies x; atque hinc valorem alterius incognitæ y per primam conditionem problematis $y = a - x$.

Aliter.

Ad vitandas fractiones fiat summa duorum numerorum $= 2a$: vocetur differentia $= 2y$: ergo major $a + y$, minor $a - y$, factàque

ctàque horum cuborum summà, invenies $2a^3 + 6ay^2 = ab^2$ &c.

PROBLEMA LI.

127. Datis, duorum numerorum facto $96 = a$, & differentià quadratorum $80 = 2b$, invenire numeros.

Summa incognita duorum numerorum vocetur $2x$, & eorum differentia $2z$: quæsitorum numerus major erit $x+z$, & minor $x-z$.

Horum factum $xx-zz=a$ per suppositionem primam, seu $xx=a+zz$.

Differentia quadratorum eorundem erit $4xz=2b$ per suppositionem secundam.

Quæratur in secunda æquatione valor $x = \frac{b}{2z}$, hoc est, $xx=\frac{bb}{4zz}$, & statuatur alteri valori ejusdem xx æqualis,

$$a+zz=\frac{bb}{4zz}$$

$$4azz+4z^4=bb$$

$$z^4+azz=\frac{bb}{4}$$

$$z^4+azz+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb$$

$$zz+\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{aa+bb}{4}}$$

$z=$

$$z=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{aa+bb}{4}}}$$

$$=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$$

$$z=\sqrt{-48+\frac{1}{2}\sqrt{9216+1600}}$$

$$=\sqrt{-48+52}=\sqrt{4}=2$$

$$xx=a+zz=96+4=100$$

$$x=10$$

$$x+z=10+2=12$$

$$x-z=10-2=\ 8.$$

Aliter.

Suppositiones

$xx-zz=a$; $4xz=2b$, sive $2xz=b$.

Quadratis partibus utriusque æquationis prodit $x^4-2xxzz+z^4=aa$

$$4xxzz=bb$$

Et addendo $x^4+2xxzz+z^4=aa+bb$

Radicem quadratam extrahe:

$$xx+zz=\sqrt{aa+bb}$$

$$xx=\sqrt{aa+bb}-zz$$

secundus valor ejusdem xx, qui conferri debet cum valore $xx=a+zz$ ex prima suppositione.

 Qua-

Quare $a+zz=\sqrt{aa+bb}-zz$

$$2zz=-a+\sqrt{aa+bb}$$

$$zz=-\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+bb}$$

$$z=\sqrt{-\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$$

$xx=\sqrt{aa+bb}-zz=104-4=100$ &c.

OBSERVATIO XV.

128. Methodus, qua uſi ſumus in ſecunda reſolutione hujus problematis, uſui eſſe poteſt inſtar principii ad alias problematum reſolutiones multò concinniùs, ac breviùs conficiendas. Repetantur veſtigia totius operationis. Inventis duabus primis æquationibus $xx-zz=a$, & $4xz=2b$, quarum prima deſignat valorem facti duorum numerorum, & altera valorem differentiæ quadratorum, utraque ad ſecundam poteſtatem evecta eſt; factaque additione invenimus harum æquationum ſummam conficere quadratum perfectum, a quo per extractionem radicis facilè obtinetur ſecundus valor ejuſdem xx; atque hinc per æqualitatem valorum via aperitur expedita reſolvendi propoſitum problema.

Quia verò hæc methodus maximè confert ad vitandas æquationes compoſitas, de quibus alibi erit agendum, in quas ſæpe incideret

Ana-

Analyſta, ſi alià viâ reſolutionem tentaret, cenſeo optimum factu, ut ſimilium quæſtionum reſolutionem eadem methodo inſtitutam ſubjiciam, quò faciliùs varietati caſuum, prout res tulerit, eamdem methodum accommodare Tyrones diſcant.

PROBLEMA LII.

129. Datis, duorum numerorum facto $54=b$, & differentià $2c=513$ cuborum eorundem, invenire numeros.

Quæſitorum ſumma incognita ſit $2z$, & eorum differentia $2y$: major $z+y$, minor $z-y$.

Horum factum $zz-yy=b$ per conditionem primam.

Quæſitorũ cubi erunt $z^3+3z^2y+3zy^2+y^3$
$z^3-3z^2y+3zy^2-y^3$;

factaque ſubductione, ut jubet problema, minoris cubi a majore, prodit differentia $6z^2y+2y^3=2c$ per ſecundam conditionem, ſive $3z^2y+y^3=c$.

Jam verò æquatio $zz-yy=b$ primæ ſuppoſitionis comparetur cum æquatione $3z^2y+y^3=c$ ſecundæ ſuppoſitionis; atque utraque ad eumdem gradum attollatur, ita ut incognita z in prima, & incognita y in ſecunda ſint in eodem gradu: quod facilè obtinetur, facto cubo primæ æquationis, & quadrato ſecundæ; nam hac ratione z evadet z^6, & y fiet y^6;

$$z^6-3z^4yy+3zzy^4-y^6=b^3$$

$$9z^4yy+6zzy^4+y^6=cc.$$

Ad-

Addantur simul duæ istæ æquationes: emerget nova æquatio, cujus primum membrum continet quadratum perfectum $z^6+6z^4yy+9zzy^4=b^3+cc$; radicem quadratam extrahe: $z^3+3zyy=\sqrt{bbb+cc}$. Hæc æquatio addatur superiori æquationi $3z^2y+y^3=c$, quæ ex secunda conditione problematis deducta jam fuit: hinc $z^3+3z^2y+3zyy+y^3=c+\sqrt{bbb+cc}$, cujus primum membrum continet perfectum cubum; adeoque extracta radice cubica, prodit major quæsitus numerus $z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{b^3+cc}}$; & substitutis valoribus determinatis $z+y=\sqrt[3]{256\frac{1}{2}+\sqrt{157464+65792\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{256\frac{1}{2}+472\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{729}=9$.

Ut autem expressio analytica universalis etiam minoris numeri $z-y$ eliciatur, sumenda erit æquatio $zz-yy=b$, quæ a prima conditione problematis derivata est, & dividenda per $z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{b^3+cc}}$; hoc est, membrum incognitum per incognitum, & cognitum per cognitum dividatur: quotus erit $z-y=\dfrac{b}{\sqrt[3]{c+\sqrt{b^3+cc}}}$ minor quæsitus numerus; & substitutis valoribus $z-y=\dfrac{54}{\sqrt[3]{256\frac{1}{2}+\sqrt{157464+65792\frac{1}{2}}}}=\frac{54}{9}=6$.

SCHO-

SCHOLION.

Hæc formula universalis $z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{b^3+cc}}$ significat sumi oportere cubum b^3 ipsius b, & addi quadrato cc quantitatis c, & inde ex hac quantitate complexa quadratam radicem eliciendam; quo facto, radix inventa addatur quantitati c, & radix cubica ex complexa hac quantitate rursum extrahatur: hæc ultima radix erit valor quæsitus numeri incogniti $z+y$. Hæc monui, ut Tyrones hisce formulis universalibus rite intelligendis assuescerent.

PROBLEMA LIII.

130. Cognito facto duorum numerorum $54=b$, & summà $945=2c$ cuborum, invenire numeros.

Duorum numerorũ summa incognita $=2z$, & eorum differentia $=2y$; major $z+y$: minor $z-y$; factum $zz-yy=b$ per conditionem primam; summa cuborum $2z^3+6zyy=2c$ per condit. secundam, ideſt $z^3+3zyy=c$.

Æquatio prima ad cubum, & secunda ad quadratum attollatur; tum prima subducatur a secunda: residuum erit $9z^4yy+6z^2y^4+y^6=cc-b^3$, cujus primum membrum quadratum perfectum continet; quare radix quadrata erit $y^3+3yzz=\sqrt{cc-b^3}$.

Hanc

Hanc æquationem addendo æquationi $z^3 + 3zyy = c$ deductæ a secunda conditione, habebitur $z^3 + 3yzz + 3zyy + y^3 = c + \sqrt{cc - b^3}$, cujus primum membrum erit cubus perfectus: extracta igitur radice cubica, prodit $z + y = \sqrt[3]{c + \sqrt{cc - b^3}}$ valor majoris numeri; & dividendo æquationem $zz - yy = b$ per hanc ultimam, erit $z - y$

$$= \frac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{cc - b^3}}}$$

valor minoris numeri; substitutisque valoribus litterarum cognitarum, erit $z + y = 9$, & $z - y = 6$.

OBSERVATIO XVI.

Illud non rarò usuvenire solet, ut, comparando duas æquationes, quæ a conditionibus problematis derivantur, resolutioni problematis fieri satis possit, si dumtaxat una ab altera subducatur, vel una alteri addatur, quin opus sit æquationes ipsas ad altiores gradus evehere.

PRO-

PROBLEMA LIV.

131. Summa duorum numerorum multiplicata per summam eorundem quadratorum data sit $1755 = 4b$ ad vitandas fractiones; & differentia horum numerorum multiplicata per differentiam eorundem quadratorum data sit $135 = 8c$: invenire duos numeros.

Denominetur, ut antea, duorum numerorum summa incognita $2z$, & eorum differentia $2y$: major ergo $z + y$; minor $z - y$; quorum quadrata $zz + 2zy + yy$, & $zz - 2zy + yy$: quæ simul addita, & ducta in $2z$ summam numerorum, efficient productum $4z^3 + 4zyy = 4b$ per conditionem primam, idest $z^3 + zyy = b$.

Subducendo jam, ut jubet problema, secundum quadratum a primo, horum differentia $4zy$ ducta in $2y$ differentiam numerorum dabit $8zyy = 8c$

$zyy = c$.

Hanc itaque æquationem a prima $z^3 + zyy = b$ subducendo habebitur $z^3 = b - c$; extractaque radice cubica, $z = \sqrt[3]{b - c} = \sqrt[3]{438\frac{3}{4} - 16\frac{7}{8}} = \sqrt[3]{421\frac{7}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3375}{8}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Valor incognitæ y elicietur substituendo inventum valorem $z = 7\frac{1}{2}$ in æquatione

zyy

$$zyy = c$$
$$7\tfrac{1}{2}yy = c$$
$$yy = \frac{c}{7\frac{1}{2}}$$
$$y = \sqrt{\frac{c}{7\frac{1}{2}}}$$
$$y = \sqrt{\frac{16\frac{7}{8}}{7\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{16\frac{7}{8}}{7\frac{4}{8}}} = \sqrt{\frac{135}{60}} = \sqrt{2\tfrac{1}{4}} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Ad normam horum problematum, quæ duas pluresve quantitates incognitas includunt, solves ea, quæ ex eodem Gaspare Baccheto subjicio problemata, deprompta ex Græcis Scriptoribus.

PROBLEMA LV.

De statuis Zethi, Amphionis, ac Matris ipsorum Antiopes.

132. Viginti uterque pendimus simul minas
Zetus ego, Fraterque. Attamen, si cæperis
Mei trientem cum quadrante Amphionis,
Senæ, parentis pondus, prodibunt minæ.

Numerus $20 = a$ dividendus in duas partes x, & $a - x$, hac lege, ut $\frac{1}{3}x + \frac{a - x}{4} = 6 = b$.

Invenies $x = 12b - 3a = \overline{12 \times 6 - 60} = 12$ &c.

PRO-

PROBLEMA LVI.

133. Dic quota nunc hora est? Superest tantum ecce diei,
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Numerum datum 24 horarum dividere in duas partes, ita ut prioris $\frac{4}{3}$ æquentur posteriori.

Sit prior pars x, ac proinde posterior $24 - x$; hinc æquatio $\frac{4}{3}x = 24 - x$ &c.

Vel pone numerum transactum horarum esse x: ergo reliquus horarum numerus erit $\frac{4}{3}x$; ac proinde omnium horarum summa $\frac{7}{3}x = 24$ &c.

PROBLEMA LVII.

134. Dic quota jam effluxit pars, o Diodore, diei?
Quantum decursi tres quintas temporis, inde
Si quater accipias, hesperiis sol occidet undis.

Numerum 24 partiri in duas partes, ita ut posterior contineat quater $\frac{3}{5}$, sive $\frac{12}{5}$ prioris; seu, quod eodem recidit, numerum 24 dividere in partes duas servantes rationem, quam habet 5 ad 12.

Sit prior pars x, posterior $24 - x$; adeoque ex conditione problematis $x : 24 - x :: 5 : 12$; atque hinc ex regulis proportionum æquatio &c.

PRO-

PROBLEMA LVIII.

135. SUrgite lanificæ, lux eſt, reliquæque diei
Octantum effluxit portio quinta trium.

Antiquorum more diem dividentes in duodecim partes æquales, ſeu in horas 12, quas Gnomonici Planetarias vocant, ponamus numerum tranſactum horarum eſſe x: ergo reliquus horarum numerus uſque ad noctem, erit $12 - x$. Dividendus eſt itaque numerus 12 in duas partes, ita ut prior contineat quintam partem de $\frac{3}{8}$, ſeu $\frac{3}{40}$ poſterioris. Quare ſecandus eſt in duas partes ſervantes rationem, quam habet 3 ad 40; hoc eſt, $x : 12 - x :: 3 : 40$.

Invenies jam effluxiſſe horæ unius $\frac{36}{43}$, ſupereſſe autem horas $11\frac{7}{43}$.

PROBLEMA LIX.

136. PRoh ſuperùm Pater, iſta odi, quæ Theſſala cantu
Molitur maga. Cum Phœbe pudibunda lateret,
Vidi ego: bis tantùm ſolis reſtabat ad ortum,
Tertia tranſactæ quantum, & pars ſeptima noctis.

Numerus 12 dividendus in duas partes, ita ut poſterior contineat $\frac{2}{3} + \frac{2}{7}$, ſeu $\frac{20}{21}$ prioris: ſi prior x, poſterior erit $\frac{20}{21}x$; hinc $x + \frac{20}{21}x = 12$.

Vel numerus 12 ſecandus in duas partes ſervantes rationem datam 21 ad 20. Fiat ergo $x : 12 - x :: 21 : 20$: itaque, quando Eclypſis lunæ facta eſt, tranſierant horæ noctis $x = 6\frac{6}{41}$; reſtabant autem uſque ad ortum ſolis $12 - x = 5\frac{35}{41}$.

PROBLEMA LX.

137. MUlæ, Aſinæque graves imponit ſervulus utres
Impletos vino, ſegnemque ut vidit Aſellam
Pondere defeſſam veſtigia figere tarda,
Mula graves gemitus ſociæ miratur, & inquit.
Unam ex utre tuo menſuram ſi mihi reddas,
Duplum oneris tunc ipſa feram: ſed ſi tibi tradam
Unam menſuram, fient æqualia utrinque
Pondera. Menſuras diſtingue Geometer iſtas.

Quæruntur duo numeri hac lege, ut primus accipiens 1 a ſecundo, ſit duplus ad reſiduum ſecundi; at ſecundus accipiens 1 a primo, ſit æqualis reſiduo primi.

Sit primus x, ſecundus z: æquatio prima $x + 1 = 2z - 2$, æquatio ſecunda $x - 1 = z + 1$. Itaque per æqualitatem valorum $x = 2z - 3$, & $x = z + 2$, oritur æquatio $z + 2 = 2z - 3$; & per reductionem $5 = z$, & $x = z + 2 = 7$.

PROBLEMA LXI.

138. Minas decem da, triplus ut fiam tui;
At tu decem da, quintuplus fiam ut tui.

Quæruntur duo numeri, ut primus accipiens 10 a ſecundo, ſit triplus reſidui ſecundi; at ſecundus accipiens 10 a primo, ſit quintuplus ad reſiduum primi.

Invenies quæſitos numeros eſſe $15\frac{5}{7}$, & $18\frac{4}{7}$.

PROBLEMA LXII.

139. Minas duas da, duplus ut fiam tui;
At tu duas da, quadruplus fiam ut tui.

Invenies quæſitos numeros $5\frac{5}{7}$, & $4\frac{6}{7}$.

PROBLEMA LXIII.

140. Adriacas dum findit aquas, e puppe Magiſtrum
Nauta rogat, quantum pelagi jam reſtet arandũ.
Ille refert. Creten inter, Siculumque Pelorum
Millia ſex numerant, exhauſti jamque profundi
Bis gemini nobis quintantes ecce ſuperſunt,
Sicania donec remos lentemus in unda.

Numerus $6000 = a$ ſecandus eſt in duas partes, ita ut prioris $\frac{4}{5}$ æquentur poſteriori; Eſto

Eſto prior x: ergo poſterior $a - x$; quare $\frac{4}{5}x = a - x$.

Invenies $x = 3333\frac{1}{3}$, & $a - x = 2666\frac{2}{3}$, quot ſtadia reſtabant uſque ad Pelorum.

PROBLEMA LXIV.

141. Æs, ferrum, ſtannum miſcens, aurique metallum
Sexaginta minas penſantem finge coronam;
Æs, aurumque duos ſimul efficiunto trientes,
Ternos quadrantes ſtanno mixtum impleat aurũ,
At totidem quintas auri vis addita ferro.
Ergo age, dic fulvi quantum tibi conjicis auri
Miſcendum, dic quantũ æris, ſtannique requiras,
Dic quoque ſufficiant duri quot pondera ferri?

Eſto quantitas auri x: quia ergo aurum, & æs, ſimul ſunt $\frac{2}{3}$ dati numeri 60, nimirum 40, erit

Quantitas æris	$= 40 - x$
& eadem de cauſa quantitas ſtanni	$= 45 - x$
Quantitas ferri	$= 36 - x$
Quantitas ergo omniũ metallorum ſimul	$121 - 2x = 60$;
Quantitas auri	$x = 30\frac{1}{2}$
Quantitas æris	$40 - x = 9\frac{1}{2}$
Quantitas ſtanni	$45 - x = 14\frac{1}{2}$
ferri	$36 - x = 5\frac{1}{2}$

Scho-

Scholion.

142. QUæ de regula alligationis vulgò præcipi solent ab Arithmeticis, multò expeditiùs per Algebram, & universaliter resolvuntur. Quin immo imperfectionem regulæ Arithmeticæ, quam notavit Bacchetus in notis ad quæst. 41. lib. 4. Diophanti, ex Analysis principiis emendabimus, ubi de problematis indeterminatis agendum erit.

PROBLEMA LXV.

143. DAto pretio unius mensuræ vini, invenire quantitatem aquæ commiscendæ, ut una mensura dato alio pretio minore vendi queat.

Sit pretium majus $16 = a$, minus $10 = b$: quantitas aquæ $= x$. Cum aquæ pretium nullum sit, erit $1 + x : 1 :: a : b$, & $b + bx = a$; & per reductionem $x = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{16}{10} - 1 = 1\frac{6}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

In reductione æquationis invenies penultimam æquationem resolvi in hanc analogiam: $x : 1 :: a - b : b$, hoc est, quantitas aquæ commiscendæ est ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

PROBLEMA LXVI.

144. DAto pretio vini generosi, & pretio vilioris, determinare quantitatem vini vilioris generoso commiscendi, ut dato aliquo pretio medio vendi queat.

Pretium unius mensuræ vini

generosi	$16 = a$
vilioris	$10 = b$
medium	$12 = c$
Quantitas unius mensuræ	$= 1$
Quantitas vilioris commiscendi	$= x$
erit ejus pretium	$= bx$
Quantitas generosi commiscendi	$= 1 - x$
ejus pretium	$12 = a - ax$.

Itaque ex conditione probl. $a - ax + bx = c$; & per reduct. $x = \frac{a-c}{a-b} = \frac{16-12}{16-10} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

PROBLEMA LXVII.

145. SUnt in quodam vasculo 20 mensuræ vini, quarum quælibet valet 12 nummos; infunditur deinde vasculo illi aqua, donec vasculum vino illo, & aquà repleatur; & tunc 1 mensura mixta valet 10 nummos. Quæritur, quanta sit capacitas illius vasculi?

Invenies totum vasculum capere 24 mensuras.

PROBLEMA LXVIII.

146. QUidam permutat aureos 568, & recipit eumdem numerum quatuor monetarum diversarum; 7 ex prima aureo æquivalent; 18 ex secunda eumdem aureum efficiunt; 21 ex tertia; 28 ex quarta. Quæritur numerus singularum quatuor monetarum?

Ponatur x numerus quæsitus: itaque aureorum $\frac{1}{7}x + \frac{1}{18}x + \frac{1}{21}x + \frac{1}{28}x = 568$ aureis &c.

PROBLEMA LXIX.

147. MErcator quidam habet 160 aureos in duplici monetæ specie, quarum omnium summa est 560: moneta autem una est $\frac{1}{3}$ aurei, & alia $\frac{1}{4}$. Quæritur, quantum habeat in unaquaque?

Sit numerus primæ monetæ x, & secundæ $560 - x$ &c.

PROBLEMA LXX.

148. DOminus ita cum servo paciscitur, ut, si laboret, det illi mercedem 7 assium; si otietur, mulctetur 5 assibus: post dies 30 nihil illi debetur, nec etiam ipse debet. Quæritur, quot diebus laboraverit, & quot otiatus fuerit?

Si dies laboris ponantur x, erunt otii $30 - x$ &c.

PROBLEMA LXXI.

149. IN exercitu Cæsareo ex Germanis, Ungaris, Italis conflato, sunt quidem Germani 25000; Ungari verò faciunt $\frac{1}{2}$ Germanorum, atque Italorum; Itali denique faciunt $\frac{1}{8}$ Germanorum, atque Ungarorum. Quæritur numerus Ungarorum, & Italorum; ac proinde quantus sit totus exercitus?

OBSERVATIO XVII.

150. NOn solùm circa numeros, aut abstractas quantitatum rationes versatur analytica methodus; verùm etiam hosce limites prætergressa ad Physicam æquè traduci potest. Ut autem in iis etiam, quæ ad naturam pertinent, quæstionibus, via æquationi aperiatur, danda opera est, ut principia quædam certissima, quorum delectus habendus est in ipso aditu problematis, assumantur, quæ vel experimentis, vel ratione nobis explorata sint. Sed cum artes, ut ait Newton, exemplis faciliùs, quàm præceptis addiscantur, placuit sequentium problematum specimen adjungere.

PROBLEMA LXXII.

Analysim instituere alligationis metallorum, ex quibus tormenta bellica conficiuntur.

151. UT problematis hujus utilitas Tyronibus constet, noverint prius oportet, metalla, ex quibus tormenta bellica conflantur, componi ex cupro, & stanno. Proportio autem cupri ad stannum, quam ferè id temporis sequuntur artifices, est ut 100 ad 12, hoc est, 100 libris cupri adjiciendæ sunt 12 libræ stanni.

Hinc autem oritur occasio, & necessitas hujus resolvendi problematis. Nam illud sæpenumero contingit, ut in antiquis armamentariis complura reperiantur tormenta, vel confracta, vel longo usu attrita, vel defectu aliquo minimè idonea; ex quorum materia jubetur artifex nova conficere. Sed dubitatio suboriri solet, utrum in antiquis metallis alligatio cupri, & stanni sit in ea ipsa proportione 100 ad 12, quæ hodie invaluit. Quare labor omnis in eo vertitur, ut cognoscatur quota pars cupri, & stanni componat alligationem cujuslibet metalli tormentorum, ex quibus materia desumenda est.

Itaque ad resolutionem problematis postulo I., quod & experientià, & ratione certissimum est, corpora omnia gravia in aqua demersa partem sui ponderis amittere, & singillatim stannum $\frac{1}{7}$ sui ponderis in aqua amittere, & cuprum $\frac{1}{9}$ sui ponderis.

II. Ut cognoscatur quantitas cupri, & stanni, quæ in aliquo antiquo tormento reperiatur, cujus totale pondus sit librarum, puta, 5200, assumatur pro arbitrio quodvis ejusdem frustum, cujus pondus in aere reperiatur esse lib. 163, quodque, si in aqua rursum ponderetur, amittat lib. 19.

III. Consideretur hoc metalli frustum, perinde ac si totum conflatum esset ex cupro; & in hac suppositione quæratur, quantum sui ponderis in aqua amitteret; & juxta præmissam observationem invenietur decrementum esse $\frac{163}{9}$. Similiter consideretur idem metalli frustum veluti totum ex stanno compositum; & rursum in hac suppositione quæratur, quantum ponderis in aqua amittat. Decrementum erit $\frac{163}{7}$.

His positis, vocetur pondus metalli mixti $163 = a$

Totius mixti decrementum in aqua $19 = b$

Decrementum, si esset ex solo cupro $\frac{163}{9} = c$

Decrementum, si esset ex solo stanno $\frac{163}{7} = d$

Quantitas quæsita cupri in eodem metallo mixto sit x, & stanni y. Harum incognitarum valor hac methodo innotescet.

Instituatur bis regula trium hoc modo. Uti a pondus metalli instar solius cupri considerati

derati ad c decrementum ejuſdem in aqua; ita x quantitas cupri incognita eſt ad decrementum proportionale ponderis, nimirum, $a: c::x:\frac{cx}{a}$.

Rurſus fiat: ut a pondus metalli inſtar ſolius ſtanni conſiderati ad d decrementum ejuſdem in aqua; ita y quantitas incognita ſtanni ad proportionale decrementum ejuſdem; nempe, $a:d::y:\frac{dy}{a}$.

Summa verò horum decrementorum æquatur decremento totius metalli mixti in aqua. Quare $\frac{cx}{a}+\frac{dy}{a}=b$ æquatio prima. Quia verò x, & y deſignant portiones cupri, & ſtanni, ex quibus mixtum metallum componitur, hinc ſecunda æquatio $x+y=a$.

Quæratur valor $x=a-y$; ſubſtitutoque hoc valore in æquatione prima, habebitur $\frac{ac-yc+dy}{a}=b$; & per reductionem $y=\frac{ab-ac}{d-c}$, & $x=a-y=a-\frac{ab+ac}{d-c}$.

Subſtituantur jam litteris determinati earum valores. Nam $ab-ac=\overline{b-c}\times a=\overline{19-\frac{163}{9}}\times 163=\frac{8}{9}\times 163=\frac{1304}{9}$, quem numerum, ſi dividas per $d-c=\frac{163}{7}-\frac{163}{9}=\frac{416}{63}$, prodibit quotus 28 valor inventus y ſtanni; ſimiliter $x=a-y=135$ valor cupri.

Cognita jam quantitate utriuſque metalli in fruſtulo, facilè hinc patet via cognoſcendæ ejuſdem mixturæ in toto tormento bellico per regulam trium. Nam, ſi in 163 libris metalli reperiuntur 28 lib. ſtanni, in libris 5200 invenientur circiter 894, & conſequenter 4306 libræ cupri.

Hinc intelliges rationem 4306 ad 894 non eſſe æqualem rationi 100 ad 12; multòque plus ſtanni ineſſe, quàm opus ſit, ut dicta proportio in alligatione metallorum ſervetur. Quantum itaque cupri adjiciendum ſit, ſtatim aſſequi poteris hoc modo. Si 12 libris ſtanni proportionales ſunt 100 libræ cupri, 894 libris ejuſdem ſtanni proportionales erunt 7450 lib. cupri. Quare inventis lib. ſtanni 4306 in antiqua alligatione, adjiciendæ erunt lib. 3144 ejuſdem, ut nova alligatio metallorum componatur juxta ſancitam proportionem 100 ad 12.

Quod ſequitur Problema Newtoni, ex ſexdecim arithmeticis ab eodem propoſitis eſt ordine duodecimum.

PROBLEMA LXXIII.

152. *Datis ſphæricorum corporum in eadem recta motorum, ſibique occurrentium magnitudinibus, & motibus, determinare motus eorundem poſt reflexionem.*

Hujus reſolutio ex his dependet conditionibus,

bus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur, quantum agit in alterum; & ut eadem celeritate post reflexionem recedant ab invicem, qua ante accedebant.

His positis, sint corporum A *&* B *celeritates* a *&* b *respectivæ; & motus (siquidem componantur ex mole, & celeritate corporum) erunt* aA *&* bB. *Et si corpora ad easdem plagas tendant, & A celeriùs movens insequatur* B, *pone* x *decrementum motus* aA, *& incrementum motus* bB *percussione exortum; & post reflexionem motus erunt* $aA - x$ *&* $bB + x$; *& celeritates* $\frac{aA - x}{A}$ *ac* $\frac{bB + x}{B}$, *quarum differentia æquatur* $a - b$ *differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio* $\frac{bB + x}{B} - \frac{aA - x}{A} = a - b$; *& inde per reductionẽ fit* $x = \frac{2aAB \quad 2bAB}{A + B}$; *quo pro* x *in celeritatibus* $\frac{aA - x}{A}$ *&* $\frac{bB + x}{B}$ *substituto, prodeunt,* $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$ *celeritas ipsius* A, *&* $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$ *celeritas ipsius* B *post reflexionem.*

Quòd si corpora obviam eant, tum signo ipsius b *ubique mutato, celeritates post reflexionem erunt* $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$ *&* $\frac{2aA + bA - bB}{A + B}$: *quarum alterutra, si forte negativa obvenerit, id arguit, motum illum post reflexionem ad plagam dirigi*

dirigi

dirigi ei contrariam, ad quam A *tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipsius* A *in casu priori intelligendum est.*

EXEMPL. *Si corpora homogenea,* A *trium librarum cum celeritatis gradibus* 8, *&* B *novem librarum cum celeritatis gradibus* 2 *ad easdem plagas tendant: tunc pro* A, a, B, *&* b *scribe* 3, 8, 9, *&* 2; *&* $\left(\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}\right)$ *evadit* -1, *ac* $\left(\frac{2aA - bA + bB}{A + B}\right)$ 5. *Recedet itaque* A *cum uno gradu celeritatis post reflexionem, &* B *cum quinque gradibus progredietur.*

OBSERVATIO XVIII.

153. SI plures in calculo ineundo occurrant quantitates, præstat interdum, propter paucitatem characterum in communi Alphabeto, aliàs majusculis, aliàs minusculis litteris, quandoque etiam characteribus græcis plerasque designare, atque inter se distinguere.

Est etiam Analystis usitata abbreviatio, ut vocant, terminorum, præsertim in æquatione finali, ut ejusdem reductio commodior sit.

Utriusque observationis luculentum exemplum suppeditant, quæ subdo ex Newtono, problemata, ex sexdecim arithmeticis in ordine, octavum, nonum, & decimum.

PRO-

PROBLEMA LXXIV.

154. *Dissimiles duarum pluriumve rerum mixturas ita componere, ut res illæ commixtæ datam inter se rationem acquirant.*

Sit unius mixturæ data quantitas $dA + eB + fC$, *alterius eadem quantitas* $gA + hB + kC$, *& eadem tertiæ* $lA + mB + nC$, *ubi* A, B, *&* C *denotent res mixtas, &* d, e, f, g, h *&c. proportiones earundem in mixturis. Et sit* $pA + qB + rC$ *mixtura, quam ex his tribus oportet componere; fingeque* x, y, *&* z *numeros esse, per quos, si tres datæ mixturæ respectivè multiplicentur, earum summa evadet* $pA + qB + rC$.

$$\textit{Igitur}\; \left.\begin{array}{l} dxA + exB + fxC \\ gyA + hyB + kyC \\ lzA + mzB + nzC \end{array}\right| = pA + qB + rC;$$

adeoque collatis terminis, $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, *&* $fx + ky + nz = r$; *& per reductionem*, $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$. *Et rursus æquationes* $\frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e}$, *&* $\frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$ *per reductionem dant* $\frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - dh} (= y) = \frac{fq - er + enz - fmz}{fh - ek}$: *quæ, si abbrevietur, scribendo* α

pro

pro $ep - dq$, β *pro* $dm - el$, γ *pro* $eg - eh$, δ *pro* $fq - er$, ζ *pro* $en - fm$, *&* θ *pro* $fh - ek$, *evadet* $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$; *& per reductionem* $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$. *Invento* z *pone* $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$, *&* $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

EXEMPL. *Si tres sint metallorum colliquefactorum mixturæ, quarum primæ pondo continet argenti* ℥ 12, *æris* ℥ 1, *& stanni* ℥ 3, *secundæ pondo continet argenti* ℥ 1, *æris* ℥ 12, *& stanni* ℥ 3, *& tertiæ pondo continet æris* ℥ 14, *stanni* ℥ 2, *& argenti nihil; sintque hæ mixturæ ita componendæ, ut pondo compositionis contineat argenti* ℥ 4, *æris* ℥ 9, *& stanni* ℥ 3: *pro* d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r *scribe* 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 *respectivè; & erit* α $(= ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9) = -104$; $\beta (= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$; *& sic* $\gamma = -143$; $\delta = 24$; $\zeta = -40$; *&* $\theta = 33$; *adeoque* $z \left(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}\right) = 0$; $y \left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143}\right) = \frac{8}{11}$; *&* $x \left(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12}\right) = \frac{3}{11}$. *Quare, si misceantur* $\frac{8}{11}$ *partes pondo mixturæ secundæ,* $\frac{3}{11}$ *partes pondo primæ, & nihil tertiæ, aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres stanni.*

PRO-

PROBLEMA LXXV.

155. *Datis plurium ex iisdem rebus mixturarum pretiis, & proportionibus mixtorum inter se, pretium cujusvis e mixtis determinare.*

Cujusvis rerum A, B, C *mixturæ* $dA + gB + lC$ *pretium esto* p: *mixturæ* $eA + hB + mC$ *pretium* q; *& mixturæ* $fA + kB + nC$ *pretium* r; *& rerum illarum* A, B, C *quærantur pretia* x, y, *&* z. *Utpote pro rebus* A, B, *&* C *substitue earum pretia* x, y, *&* z; *& exsurgent æquationes* $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, *&* $fx + ky + nz = r$, *ex quibus, pergendo, ut in præcedente Problemate, elicientur itidem* $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$; $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$; *&* $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

Exempl. *Emit quidam* 40 *modios tritici*, 24 *modios hordei*, *&* 20 *modios avenæ*, *simul* 15 *libris*, 12 *solidis*; *deinde consimilis grani emit* 26 *modios tritici*, 30 *modios hordei*, *&* 50 *modios avenæ*, *simul* 16 *libris*; *ac tertiò consimilis etiam grani emit* 24 *modios tritici*, 120 *modios hordei*, *&* 100 *modios avenæ*, *simul* 34 *lib. Quæritur, quanti æstimandus sit modius cujusque grani? Resp. Modius tritici* 5 *solidis*, *hordei* 3 *solidis*, *& avenæ* 2 *solidis*. *Nam pro* d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, *&* r *scribendo respectivè* 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, *&* 34: *prodit* $\alpha \left(= ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16\right) = -234\frac{2}{5}$; *&* $\beta \left(= dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20\right) = 1480$. *Atque ita* $\gamma = -576$; $\delta = -500$; $\zeta = 1400$; *&* $\theta = -2400$; *adeoque* $z \left(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 288000}{-806400 + 3552000} = \frac{274560}{2745600}\right) = \frac{1}{10}$; $y \left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576}\right) = \frac{3}{20}$; *&* $x \left(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40}\right) = \frac{1}{4}$. *Constitit itaque modius tritici* $\frac{1}{4}$ *lib.*, *seu* 5 *solidis*; *modius hordei* $\frac{3}{20}$ *lib.*, *seu* 3 *solidis*; *& modius avenæ* $\frac{1}{10}$ *lib.*, *seu* 2 *solidis*.

PROBLEMA LXXVI.

156. *Datis, & mixturæ, & mixtorum gravitatibus specificis, invenire proportionem mixtorum inter se.*

Sit e *gravitas specifica mixturæ* $A + B$, *cujus* A *gravitas specifica est* a, *&* B *gravitas* b: *& cum gravitas absoluta, seu pondus componatur ex mole corporis, & gravitate specifica, erit* aA *pondus ipsius* A, bB *pondus ipsius* B, *&* $eA + eB$ *pondus aggregati* $A + B$; *adeoque* $aA + bB = eA + eB$; *indeque* $aA - eA = eB - bB$, *seu* $e - b . a - e :: A . B$.

Exempl. *Sit auri gravitas ut* 19, *argenti ut* $10\frac{1}{3}$, *& Coronæ Hieronis ut* 17: *eritque* 10 . 3 $(:: e - b . a - e :: A . B)$ :: *moles in auri corona ad molem argenti*, *vel* 190 . 31 $(:: 19 \times 10 . 10\frac{1}{3} \times 3 :: a \times \overline{e - b} . b \times \overline{a - e})$ :: *pondus auri in corona ad pondus argenti*, *&* 221 . 31 :: *pondus coronæ ad pondus argenti*.

PARS SECUNDA.

DE ANALYSI SIMPLICI, ET DETERMINATA.

CAPUT PRIMUM.

157. QUas hactenus attuli quæstiones varias, nullo inter se nexu, atque ordine cohærentes, ad eam rem congerere libuit, ut in æquationibus transformandis, & concinnandis, atque in reliquis calculi litteralis regulis, exercitationis materies Tyronibus ne deesset; ac problemata, præceptionibus prope singulis inserta, earum usum amplissimum illis ipso artis analyticæ initio aperirent.

Jam verò priusquam altiores æquationes, earumque transformationes aggredior, novam ordiri juvat seriem problematum, quæ Præstetus ex Diophanto complexus est lib. 2. tom. 2. elem. math.; & quamvis nonnulla ex illis resoluta jam sint, tamen Tyroni jam exercitato plurima occurrent, quæ ipsum acuant, atque instruant, nimirum

I. Connexio, atque ordo problematum.
II. Universalitas resolutionum.
III. Comprehensio omnium casuum.

IV. Denique observationes variæ, quas Analystis familiares esse oportet.

Synopsis.

Principia, quibus dirigimur in denominandis incognitis, quò expeditius ad æquationem finalem perveniatur. Criterium problematis indeterminati. Si quod lateat vitium in conditionibus problemati appositis, processu ipso analyticæ resolutionis detegitur. Conditio inutilis, vel repetita determinationi problematis officit. Quantitatis arbitrariæ limites a præcedentibus æquationibus constituti. Quæstionem indeterminatam ab indefinita distinguere. Resolutionis indefinitæ specimen. Quæstiones planæ ad lineares depressæ. Analysis trianguli rectanguli. Exterminatio quantitatis incognitæ, quæ plurium in utraque æquatione dimensionum existat. Artificium tollendi quantitates quotcunque surdas ex æquationibus.

Definitio I.

158. Problema indefinitum illud voco, quod infinitis, iisque diversis modis resolvi potest.

Problema indeterminatum voco illud, quod pluribus dumtaxat, iisque diversis modis resolvi potest.

Resolutioni indeterminatæ, aut indefinitæ præscribi limites intelligo, quando exponitur maxima, & minima diversarum magnitudinum, quarum quælibet satisfacere potest proposito problemati per quantitates positivas.

Definitio II.

Analysim simplicem, & determinatam appello, in qua quæstiones determinatæ proponuntur per æquationes, in quibus quantitates incognitæ lineares, aut planæ sunt, quæ ex jactis principiis resolvi possunt.

PROBLEMA GENERALE.

Regulas generales resolvendorum problematum summatim exequi.

159. Monet sæpe Newtonus solutiones quæstionum eò magis expeditas, & artificiosas ut plurimũ evadere, quò pauciores incognitæ quantitates sub initio ponuntur. Quod artificium Obser. XIII. attigimus quidem, sed accuratiùs hoc capite enucleandum, & principia quædam Tyronibus tradenda sunt, quorum usu id assequi facilè possint.

PRINCIPIUM I.

Cognità summà plurium quantitatum, cognitisque summis alternatim omnium minùs qualibet, singularum valores determinare.

Suppositiones.

Summam cognitam omnium quantitatum voco s: Summam omnium minùs primà, voco a: Summam omnium, minùs secundà, voco b: Summam omnium, minùs tertià, c; & sic in infinitum.

Si ergo ex summa omnium s subtrahatur a, summa omnium, minùs primà: residuum, ideſt $s-a$, manifestè erit quantitas prima tota cognita. Pariter, si ex summa omnium s subtrahas summam omnium, minùs secundà: residuum, nempe $s-b$, erit quantitas secunda cognita: sic $s-c=$ tertiæ; $s-d=$ quartæ quantitati; & sic in infinitum, ut in adjecto schemmate.

Quantitas prima vocetur z, secunda y, tertia x.

Suppositiones.

Summa cognita trium quantitatum
$z+y+x=s=45$;
Summa omnium, minùs primà, $y+x=a=20$;
Summa omniũ, minùs secundà, $z+x=b=40$;
Summa omnium, minùs tertià, $z+y=c=30$.

Resolutio.

Quantitas prima $z=s-a=45-20=25$;
secunda $y=s-b=45-40=5$;
tertia $x=s-c=45-30=15$.

Co-

COROLLARIUM I.

Constat ergo, quoties innotescit summa omnium quotlibet incognitarum, & summa ordinatim omnium, minùs qualibet, statim exprimi posse in litteris cognitis valorem singularum, vocando primam $s-a$, secundam &c.

COROLLARIUM II.

Habes resolutionem indefinitam pro quovis numero. Verùm, ut quæstio proposita nihil contradictionis involvat in suppositionibus, necesse est, ut summa cognita s æquetur summæ $3s-a-b-c$, hoc est $s=\frac{a+b+c}{2}$.

PRINCIPIUM II.

QUÆSTIO I.

160. Reperire duas quantitates x, & y, quarum differentia $2b$, & summa $2a$ sint cognitæ.

Theorema, & resolutio generalis ex n. 115. cap. 4. Major $x=a+b$; Minor $y=a-b$.

QUÆ-

QUÆSTIO II.

161. Cognitâ summâ trium quantitatum, & excessu primæ supra secundam, itemque excessu secundæ supra tertiam, quantitates singulas determinare.

Vocetur tertia quantitas minima x: excessus secundæ super hanc c: excessus verò primæ supra secundam b; & summa trium a. Ergo per suppositiones

Tertia $= x$
Secunda $= x + c = x + 8$
Prima $= x + c + b = x + 8 + 3$
Summa $3x + 2c + b = a = 3x + 16 + 3 = 34$.
Quare transponendo, & dividendo per 3, ac substituendo valorem x, habebitur

Resolutio generalis.

Tertia $x = \frac{a - 2c - b}{3} = 5$

Secunda $x + c = \frac{a + c - b}{3} = 13$

Prima $x + c + b = \frac{a + c + 2b}{3} = 16$.

OBSERVATIO I.

162. In hisce, aliisque similibus resolutionibus observabis incognitarum denominationes, quæ facili, & obvio discursu expeditè eliciuntur ex ipso quæstionis statu probè perspecto, ipsissimas esse, quas longiore circuitu generales Regulæ gradatim ex singulis suppositionibus suppeditant. Exemplo sit hæc ipsa quæstio. Quantitates incognitæ designentur tota dem diversis litteris: sit prima quantitas quæsita z, secunda y, tertia x. Ex tertia suppositione habeo $y - c = x$, seu $y = x + c$: ex secunda suppositione $z - b = y$, seu $z = y + b = x + b + c$. Quare vides expressiones analyticas $x + c$, & $x + b + c$, secundæ y, & primæ z, deductas ab hisce æquationibus, easdem planè esse, quas immediatè, ac primò ex ipsis conditionibus mentis acies statim elicit in ipso quantitatum denominandarum artificio.

Artificium denominandi incognitas quantitates.

SCHOLION.

In omni generali resolutione notabis quamlibet formulam esse instar canonis, seu principii, ex quo infinitæ particulares resolutiones hauriuntur.

QUÆSTIO III.

163. Cognitâ summâ quatuor quantitatum $= a$, & excessu primæ supra secundam $= b$, secundæ supra tertiam $= c$, & tertiæ supra quartam $= d$, quantitates determinare.

Suppositiones.

IV.	$=x$	
III.	$=x+d$	$=x+10$
II.	$=x+d+c$	$=x+10+8$
I.	$=x+d+c+b$	$=x+10+8+3.$

Summa.

$$4x+3d+2c+b=a$$
$$4x+30+16+3=69.$$

Resolutio.

IV. $$x=\frac{a-3d-2c-b}{4}=5$$

III. $$x+d=\frac{a+d-2c-b}{4}=15$$

II. $$x+d+c=\frac{a+d+2c-b}{4}=23$$

I. $$x+d+c+b=\frac{a+d+2c+3b}{4}=26.$$

QUÆSTIO IV.

164. Cognità summà quinque quantitatum $=a$, cognitoque excessu primæ supra secundam $=b$, secundæ supra tertiam $=c$, tertiæ supra quartam $=d$, quartæ supra quintam $=e$, quantitates determinare.

Sup-

Suppositiones.

V.	$=x$	
IV.	$=x+e$	$=x+12$
III.	$=x+e+d$	$=x+12+10$
II.	$=x+e+d+c$	$=x+12+10+8$
I.	$=x+e+d+c+b$	$=x+12+10+8+3.$

Summa.

$$5x+4e+3d+2c+b=a$$
$$5x+48+30+16+3=122.$$

Resolutio.

V. $$x=\frac{a-4e-3d-2c-b}{5}=5$$

IV. $$x+e=\frac{a+e-3d-2c-b}{5}=17$$

III. $$x+e+d=\frac{a+e+2d-2c-b}{5}=27$$

II. $$x+e+d+c=\frac{a+e+2d+3c-b}{5}=35$$

I. $$x+e+d+c+b=\frac{a+e+2d+3c+4b}{5}=38.$$

QUÆSTIO V.

165. Cognità summà quantitatum quotlibet, cognitisque excessibus primæ supra secundam, & sic in infinitum, quantitates determinare.

 Sup-

Suppositiones.

Esto N numerus quilibet quantitatum: sit $a=565$ summa omnium: sint differentiæ

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i,
3,	8,	10,	12,	14,	15,	17,	18,

Resolutio infinita.

Summando, transponendo, dividendo, substituendo, erit, omisso longiore calculo litterali, $x=5$

VIII. $x+i=23$

VII. $x+i+h=40$

VI. $x+i+h+g=55$

V. $x+i+h+g+f=69$

IV. $x+i+h+g+f+e=81$ &c.

Summa omnium $565=a$.

Vides hic assumptas esse quantitates novem, adeoque $N=9$: sed pari pacto posset in infinitum procedi.

QUÆSTIO VI.

166. Cognitis dumtaxat summis alternativis trium quantitatum z, y, x, eas determinare.

Sup-

Suppositiones.

$$z+y=a=20$$
$$z+x=b=40$$
$$y+x=c=30:$$

ergo summando $2z+2x+2y=a+b+c$; & dividendo per 2, erit $z+x+y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=45$ summa totalis. Huic summæ trium quantitatum jam notæ, quam vocabis s, subtrahendo singulas summas alternativas, habebis singulas quantitates ex primo principio.

$x=s-a=45-20=25$

$y=s-b=45-40=5$

$z=s-c=45-30=15$.

Idem, sed longiore operatione assequeris ex summa $\frac{a+b+c}{2}$ in litteris cognitis expressa, subtrahendo singulas summas alternativas, & summando residua in hunc modum.

$$\begin{array}{l} z+y+x=\frac{a+b+c}{2} \\ -z-y\quad=-a \\ \hline x=\frac{-a+b+c}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} z+y+x=\frac{a+b+c}{2} \\ -z\quad -x=-b \\ \hline y\quad=\frac{a-b+c}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z+y+x=\frac{a+b+c}{2} \\ -y-x=-c \\ \hline z=\frac{a+b-c}{2} \end{array}$$

$x=25;\ y=5;\ z=15.$

SCHO-

SCHOLION.

RESolutionis universalis formula ostendit, quamlibet ex summis alternativis minorem esse debere duarum reliquarum summà, ut quæstio positiva esse possit.

OBSERVATIO II.

De Problematis indeterminatis.

167. INterdum contingit, ut, postquam conditiones problematis singulæ impletæ jam sunt, ac totidem æquationibus expressæ, post varias reductiones deveniatur ad æquationem finalem, in qua incognitæ quantitas reperiatur in utroque membro sub eodem signo, atque hinc ejusdem valor determinari nequaquam possit. Exemplo sit hæc æquatio $a-b+c-v=d-v$. Valor incognitæ v determinari non potest; nam transponendo v, oritur æquatio $a-b+c=d$ ex solis cognitis, ac proinde nullius usus. Non raro etiam æquatio finalis duas incognitas involvit, quarum neutra exterminari potest per regulas traditas.

Criterium problematis indeterminati.

In utroque casu problema dicitur indeterminatum, quia non unam, sed plures obtinere potest solutiones, substituendo loco incognitæ numerum pro libito assumptum, integrum, aut fractum, nisi fortè suos habeat limites a præcedentibus æquationibus veluti sancitos. Exemplis meliùs quàm præceptis res illustrabitur.

QUÆSTIO VII.

168. COgnitis tantùm summis alternativis binarum ex quatuor quantitatibus z, y, x, v, determinare summam totalem, & quantitates singulas.

Suppositiones.

$$\begin{aligned} z+y&=a=13\\ y+x&=b=15\\ x+v&=c=19\\ v+z&=d=17 \end{aligned}$$

Summa $2z+2y+2x+2v=a+b+c+d$;
hoc est, $z+y+x+v=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$.

Habes hinc summam totalem quatuor incognitarum quantitatum æquari semissi totius aggregati ex quatuor alternis summis jam cognitis. Itaque problema determinatum est, si referatur ad summam totalem; quin immo hinc deduci regula generalis potest, non solum pro quatuor, sed etiam pro quinque, sex, septem quantitatibus &c., quarum paris cujusque summa datur. Si enim in unam summam addantur simul æquationes omnes, quæ conditiones problematis singulas exhauriunt, prodibit æquatio, in qua semper omnium quæsitarum quantitatum summa æquabitur semissi aggregati summarum particularium paris cujusque.

Verùm

Verùm hæc inventa æquatio summæ totalis $z+y+x+v=\frac{a+b+c+d}{2}$ nullius mihi usus esse potest ad determinandas quantitates singulas, uti factum est in præcedenti problemate: ratio est, quia, cum summæ particulares cognitæ sint tantùm binarum, si ab hac æquatione duas tantùm incognitas $z+y=a$ subducam, nempe

$$\begin{array}{ll} z+y+x+v & =\frac{a+b+c+d}{2} \\ -z-y & =-a \end{array}$$

prodibit $\quad x+v=\frac{-a+b+c+d}{2}$,

quæ duas adhuc incognitas involvit, quarum valorem separatim cognoscere non possum. Tres incognitas auferre non possum, quia ternarum valorem non habeo cognitum ex suppositionibus probl. Si quatuor incognitas subducam, nihil mihi remanet cognoscendum. Quare alia mihi ineunda via est longè diversa ab ea, quam tenui in præcedenti problemate, pro quatuor quantitatibus determinandis: atque hinc illud etiam intelligo, quòd, si loco quatuor incognitarum, sex, aut octo, aut decem &c. semper numero pari substituerentur, eadem prorsus mihi difficultas in resolutione occurreret.

Contra verò, si summas alternas binarum ex quotlibet quantitatibus haberem cognitas, sed quantitates ipsæ numero semper dispari haberentur, puta, quinque, septem, aut novem, singularum valor facilè inveniretur. Nam ab æquatione, in qua exhibetur omnium summa, subducendo quatuor, aut sex, aut octo quantitates incognitas, quarum binatim summa datur, residuum esset valor unius incognitæ; atque hinc expeditus mihi progressus esset ad reliquas inveniendas. Itaque, si numerus incognitarum sit dispar, problema determinatum erit, non solùm respectu summæ totalis, verùm etiam respectu valoris singularum.

Quamobrem, ut decernam, utrum cognitis summis alternis binarum ex quotlibet quantitatibus, sed numero pari, problema sit, nec ne determinatum, propositæ quæstionis resolutionem aggredior hac via.

Suppositiones.

$$\begin{array}{ll} z+y=a & x+v=c \\ y+x=b & v+z=d. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y=a-z & =b-x & \text{valor } y \\ x=b+z-a & =c-v & \text{valor } x \\ z=a-b+c-v & =d-v & \text{valor } z \\ a-b+c-v & =d-v & \\ \text{vel } a-b+c & =d. & \end{array}$$

videlicet comparando suppositionem primam $y=a-z$, & secundam $y=b-x$, erit transponendo $x=b+z-a=c-v$ ex tertia suppositione $x=c-v$. Rursum transponendo erit $z=a-b+c-v=d-v$ ex quarta suppositione.

Duos

Duos hosce valores comparando fit $a-b+c-v=d-v$, vel $a-b+c=d$; ex quarum æquationum neutrà valor v potest elici, quippe utrumque membrum nonnisi incognitam v continet sub eodem signo.

Atque hoc est certum indicium quæstionis indeterminatæ. Cum autem tot sint suppositiones, quot incognitæ, signum est aliquam ex conditionibus problematis esse inutilem, vel repetitam; atque adeo *numerum datorum a se mutuò non dependentium non adæquare quæsitorum numerum*: quod facilè apparet in resolutione earum æquationum, quibus designantur suppositiones ipsæ; quippe quantitates $a+b+c$, cum sint jam cognitæ, & determinatæ, quemadmodum etiam d, non opus est nova determinatione, quæ oritur ex illa æquatione $a-b+c=d$; neque enim d est arbitraria, sed necessariò æqualis ipsi $a-b+c$; sed v, cum valorem non habeat determinatum ex æquationibus, est indeterminata, & arbitraria, ac potest pro libito sumi. Sed, ut resolutio positiva esse possit, observandæ sunt conditiones æquationum, eritque resolutio infinita, quam subdo.

Conditio inutilis, vel repetita.

I. $z=a-b+c-v$ II. $y=b-c+v$
III. $x=c-v$ IV. v arbitraria.

Erit ergo arbitraria v minor quàm c, ut positiva sit $x=c-v$: erit eadem v minor d, ut positiva sit $z=d-v$; sed eadem v debet esse major $-a+d$, ut positiva sit $y=a-d+v$.

Quantitatis arbitrariæ limites.

EXEM-

EXEMPLUM.

SI ergo supponamus $a=13$; $b=15$; $c=19$; at verò d necessariò $=a-b+c=13-15+19=17$; quantitas arbitraria v, quæ debet esse inter c, & $d-a$; itemque inter d, & $d-a$, habebit his suppositis justos limites inter 17, & 4; occurrentque duodecim resolutiones diversæ in numeris integris: quod experiri per te ipse poteris, incipiendo a 5 usque ad 16 inclusivè.

Quæstio indeterminata.

$v=5$ arbitraria
$x=c-v=19-5=14$
$y=b-c+v=15-19+5=1$
$z=a-b+c-v=13-15+19-5=12$.

Numeri inventi implent conditiones problematis. Nam

$$z+y=a=12+1=13$$
$$y+x=b=1+14=15$$
$$x+v=c=14+5=19$$
$$v+z=d=5+12=17.$$

Duodecim resolutiones in numeris integris.

$v=$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$x=$	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
$y=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$z=$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1.

Quòd si pro arbitraria v sumere libeat etiam numerum fractum, qui sit inter 4, & 17, erunt resolutiones infinitæ.

EXEM-

EXEMPLUM.

Esto $v = 4\frac{1}{2}$

$x = c - v = 19 - 4\frac{1}{2} = 14\frac{1}{2}$

$y = b - c + v = 15 - 19 + 4\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$z = a - b + c - v = 13 - 15 + 19 - 4\frac{1}{2}$

$= 12\frac{1}{2}$.

Quæstio indefinita. Numeri inventi implent conditiones problematis.

$$z + y = 12\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 13 = a$$
$$y + x = \tfrac{1}{2} + 14\tfrac{1}{2} = 15 = b$$
$$x + v = 14\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2} = 19 = c$$
$$v + z = 4\tfrac{1}{2} + 12\tfrac{1}{2} = 17 = d.$$

Itaque quæstio indeterminata est, si quærantur numeri integri; & indefinita, si etiam fractis contenti simus.

Hanc quæstionem idcirco fusiùs tractandam suscepi, I. ut oblata occasione docerem discernere quæstiones determinatas ab indeterminatis, & infinitis. II. ut obiter aliquid indicarem de modo ejusmodi quæstiones tractandi, quarum leges sequenti tractatu complectar. Jam ergo processum totum oculis subjicio, in quo recoles uno obtutu omnia supradicta.

Æquationes.	*Transpositæ.*
I. $z + y = a$	I. $y = a - z$
II. $y + x = b$	II. $y = b - x$
III. $x + v = c$	III. $x = c - v$
IV. $v + z = d.$	IV. $z = d - v.$

Trans-

Transpositæ

$a - z = b - x$

$x = b - a + z = c - v.$

Transposita

$z = a - b + c - v = d - v$, cujus transposita inutilis.

Resolutio infinita

I. $z = a - b + c - v$

II. $y = b - c + v$

III. $x = c - v$

IV. v arbitraria, salvis conditionibus.

Resolutiones determinatæ

$a = 13$; $b = 15$; $c = 19$; $d = a - b + c = 17$.
$z = d - v$; $y = a - d + v$; $x = c - v$;
v arbitraria intra limites constitutos.

SCHOLION.

IN determinando primo incognitarum valore ex primis æquationibus problematis indeterminati, initium perinde duci potest a valore primæ z, aut secundæ y, aut tertiæ x. Quin immo consultiùs interdum est indeterminatam relinquere quantitatem primam z, cujus

 valor

valor ultimo loco accipi poteſt, poſtquam reliquarum omnium valor ſumptus jam fuerit: ut patebit facilè experienti pro reſolutione infinita, quam problemate ſuperiore tradidi, & ſequenti exemplo luculentiùs conſtabit.

QUÆSTIO VIII.

169. Cognitis ſummis alternis binarum ex quotlibet quantitatibus numero pari, ipſas determinare.

Majoris commodi, atque ordinis gratià indeterminata relinquatur quantitas prima z.

Itaque z ſit arbitraria; $y=a-z$; $x=b-a+z$; $v=a-b+c-z$ &c.

Quo poſito reſolutione infinitam habebis pro quotlibet quantitatibus poſitivis, ſi aſſumas z arbitrariam minorem a, ſed majorem $+a-b$; & rurſus minorem $a-b+c$, & majorem, quàm $-a+b-c+d$; atque ita in infinitum.

Suppoſità arbitrarià z intra prædictos limites, erunt cæteræ quantitates.

I. $=z$
II. $=-z+a$
III. $=z-a+b$
IV. $=-z+a-b+c$
V. $=z-a+b-c+d$
VI. $=-z+a-b+c-d+e$
VII. $=z-a+b-c+d-e+f$
VIII. $=-z+a-b+c-d+e-f+g$;

atque ita porro in infinitum alternando ſigna po-

ſitiva, & negativa; ita ut in ſede numeri paris indeterminata ſit ſemper negativa, & prima ſumma poſitiva: reliquæ alternatim poſitivæ ſint, & negativæ.

Hujus reſolutionis infinitæ primò demonſtrationem ocularem in æquationibus indeterminatis propono; deinde exemplum ſubjicio in quantitatibus 6, cum æquationibus, ex quibus deſcendit, & in numeris determinatis, claritatis causà.

Reſolutio infinita demonſtrata in 6 quantitatibus.

Suppoſitiones

I. $z+y=a$, & $y=a-z$
II. $y+x=b$, & $y=b-x=a-z$
III. $x+v=c$, & $x=c-v=b-a+z$
IV. $v+t=d$, & $v=d-t=c+a-b-z$
V. $t+s=e$, & $t=e-s=-a+b-c+d+z$
VI. $s+z=f$, & $s=f-z=a-b+c-d+e-z$
$f=a-b+c-d+e$ inutilis.

Reſolutio infinita

I. z arbitraria
II. $y=-z+a$
III. $x=z-a+b$
IV. $v=-z+a-b+c$
V. $t=z-a+b-c+d$
VI. $s=-z+a-b+c-d+e$.

 Quam-

Quamvis porro z ſit arbitraria, ſi tamen eam determinare velis, ita ut omnes quantitates ſint poſitivæ, obſervanda eſt ratio, quam z habet in æquationibus ad cæteras quantitates: quem ad finem hæc mihi facilis regula occurrit. Obſervo in reſolutione infinita z alternatim venire poſitivè, & negativè: ubi eſt negativa, minor eſſe debet, quàm ſumma cognita, ut, eà detractà, ſit poſitiva: ubi z poſitiva eſt, debet eſſe major eàdem ſummà cognità negativà ſimul poſità in eodem membro æquationis, ut nempe ex z majore adjectà illi quantitati negativæ reſultet terminus poſitivus. Ita ſtatutis limitibus ipſius z, facillimè termini ſinguli a z incipiendo determinantur.

Limites.

Ut ergo progrediar ad ſolutionem determinatam promiſſam, ſive potius ad ſeriem aliquam ſolutionum determinatarum, determino ſuppoſitiones.

$a=100$; $b=40$; $c=30$; $d=25$; $e=20$;
$f=a-b+c-d+e=85$.

His ſuppoſitis, & conſiderata reſolutione infinita juxta leges datas, reperies z majorem quàm 65, & minorem quàm 85. Quare intra hos limites orietur ſeries reſolutionum decem, & octo, quam ſubdo pro ſex tantùm quantitatibus, brevitatis gratià; & promovere poteris pro libito in octo, decem, & quotquot demum numero pari.

$z=$

$z=66,\ 67,\ 68$ &c. uſque ad 84 incluſivè;
$y=34,\ 33,\ 32$ &c. uſque ad 16;
$x=6,\ 7,\ 8$ &c. uſque ad 24;
$v=24,\ 23,\ 22$ &c. uſque ad 6;
$t=1,\ 2,\ 3$ &c. uſque ad 19;
$s=19,\ 18,\ 17$ &c. uſque ad 1.

Ubi nota I. mutatis ſuppoſitionibus oriri alias ſeries in numeris integris.

II. Si locus ſit fractionis, hanc ipſam ſeriem procedere in infinitum.

OBSERVATIO III.

170. HÆc de quæſtionibus indeterminatis in præſenti tractatu ad ſpecimen ſatis. Juvat nunc in horum problematum jucundiſſimo æquè ac uberrimo fructu pauliſper immorari, ut Tyrones intelligant, quot quantæque veritates univerſales, ac regulæ inveniendi ex unius vel alterius problematis analytica reſolutione ſuboriantur.

I. Cognitis ſummis alternis binarum ex quotlibet quantitatibus numero pari, vel diſpari, generali regula invenimus ſummam totalem æquari ſemper ſemiſſi aggregati ſummarum particularium paris cujuſque.

II. Ex quotlibet quantitatibus numero pari, problema indeterminatum eſt: numero impari, determinatum.

III. Ubi problema indeterminatum eſt, Analyſis ipſa limites oſtendit.

IV. In utroque caſu numeri paris, vel

impa-

imparis generali regula invenimus, qua ratione quæſitæ quantitates determinari poſſint.

V. Quamvis in ipſo aditu problematis tot æquationes interdum inveniantur, quotus eſt incognitarum numerus; tamen, ſi vitium lateat in ipſis ſuppoſitionibus, quarum aliqua ſit vel inutilis, vel repetita, in proceſſu analyticæ reſolutionis ſtatim detegitur.

QUÆSTIO IX.

171. Cognitis ſummis alternis binarum ex quinque quantitatibus, quantitates ipſas determinare.

Suppoſitiones

I. $z+y=a$, & $y=a-z$
II. $y+x=b$, & $y=b-x=a-z$
III. $x+v=c$, & $x=c-v=b-a+z$
IV. $v+t=d$, & $v=d-t=c+a-b-z$
V. $t+z=e$, & $t=e-z=z-a+b-c+d$.

Tranſpoſitæ

$$x=b-a+z$$
$$t=d-c+b-a+z$$
$$v=c-b+a-z$$
$$2z=e-d+c-b+a.$$

Reſolutio generalis

$$z=\frac{a-b+c-d+e}{2}$$
$$y=\frac{a+b-c+d-e}{2}$$
$$x=\frac{-a+b+c-d+e}{2}$$
$$v=\frac{a-b+c+d-e}{2}$$
$$t=\frac{-a+b-c+d+e}{2}.$$

Reſolutio determinata ex ſuppoſitionibus

$z+y=a=5$	$z=3$
$y+x=b=6$	$y=2$
$x+v=c=5$	$x=4$
$v+t=d=7$	$v=1$
$t+z=e=9$	$t=6$.

In hac reſolutione ut quantitates omnes ſint poſitivæ, ſubtractis ſingulis ſummis $a+c$, $a+d$, $b+d$, $b+e$, $c+e$ ex reliquis tribus quantitatibus, oportet reſidua eſſe poſitiva. Determinatis ergo ſummis uno ex infinitis modis poſſibilibus ſub hac lege, hinc exſurget reſolutio determinata ſupra poſita.

QUÆSTIO X.

172. Cognitis summis alternis binarum ex quotlibet quantitatibus numero dispari, singulas determinare.

Ex resolutione quæstionis VI., & præcedentis facilè elici potest formula determinandi quantitates quotlibet numero impari. Itaque proposita breviter lege universali, & resolutione determinata in novem quantitatibus, æquationes, a quibus hæc ipsa descendit, supprimo, quas quisque exercitationis gratià sibi construere poterit. Poterit etiam qui velit, formulam applicando, determinare quantitates 11, 13; & sic deinceps per resolutiones infinitas. Itaque esto lex quantitates determinandi proposito impari earum numero.

I. Dispone ex ordine quantitates omnes cognitas.

II. In prima linea primam cognitam scribe cum signo +, secundam cognitam cum signo —; atque ita alternando usque ad ultimam quantitatem cognitam.

III. In altera linea pro secunda quantitate primas duas cognitas scribe cum signo +, cæteras alternando —, & + usque ad ultimam.

IV. In tertia linea primam cognitam scribe sub signo —, secundam, & tertiam signo +, cæteras usque ad ultimam alternatim —, & +.

V. In quarta linea primam cognitam scribe sub signo +, secundam sub signo —, tertiam, & quartam sub signo +, & cæteras alternatim, ut supra.

Uno verbo: in prima linea quantitas prima est positiva, sequentes alternatim negativæ, & positivæ. Cæteræ lineæ primò incipiunt alternatim per quantitatem positivam, tum negativam; nimirum lineæ numero pari incipiunt a positiva, numero impari a negativa; secundò, incipiendo a linea secunda, sunt in ea duæ quantitates positivæ proximæ in primis sedibus: in sequentibus lineis ex ordine quantitates duæ positivæ proximæ sunt una sede ulteriores: ex. c. in tertia linea est quantitas secunda, & tertia; in quarta linea est tertia, & quarta &c. Quod facilè jam per se quisque notabit in resolutione generali, quam subdo pro novem quantitatibus.

Suppositiones

I. $z+y=a=4$
II. $y+x=b=5$
III. $x+v=c=8$
IV. $v+t=d=10$
V. $t+s=e=13$
VI. $s+r=f=16$
VII. $r+q=g=12$
VIII. $q+p=h=17$
IX. $p+z=s=13$.

Re-

Reſolutio generalis

$$\begin{aligned}
2z &= a-b+c-d+e-f+g-h+i\\
2y &= a+b-c+d-e+f-g+h-i\\
2x &= -a+b+c-d+e-f+g-h+i\\
2v &= a-b+c+d-e+f-g+h-i\\
2t &= -a+b-c+d+e-f+g-h+i\\
2s &= a-b+c-d+e+f-g+h-i\\
2r &= -a+b-c+d-e+f+g-h+i\\
2q &= a-b+c-d+e-f+g+h-i\\
2p &= -a+b-c+d-e+f-g+h+i.
\end{aligned}$$

Determinata

$2z=2$; $2y=6$; $2x=4$; $2v=12$; $2t=8$; $2s=18$; $2r=14$; $2q=10$; $2p=24$.

QUÆSTIO XI.

CASUS I.

173. COgnita ratione b ad c, quam habent inter ſe duæ quantitates z, & y, cognitaque harum ſummà a, quantitates invenire.

Suppoſitiones

I. $b:c::z:y$ II. $z+y=a$
$3:1::z:y$. $z+y=60$.

Ex ſuppoſitione prima $y=\frac{cz}{b}$; adeoque ex

ſuppoſi-

ſuppoſitione ſecunda $z+\frac{cz}{b}=a$; & utrinque multiplicando, & dividendo erit $z=\frac{ab}{c+b}$; & hunc valorem ſubſtituendo in æquatione $y=\frac{cz}{b}$, erit $y=\frac{ac}{b+c}$.

Reſolutio generalis

$$z=\frac{ab}{b+c}=45; \qquad y=\frac{ac}{b+c}=15.$$

Hinc Canon.

MUltiplica quantitatem datam per priorem terminum proportionis datæ: productum divide per ſummam terminorum proportionis; habebis primam quantitatem. Productum verò quantitatis datæ in ſecundum terminum proportionis diviſum pariter per ſummam terminorum rationis exhibet ſecundam quantitatem.

THEOREMA.

UT ſumma terminorum rationis datæ ad terminum primum, ita quantitas data ad primam incognitam. Nam $z=\frac{ab}{b+c}$; ergo $b+c:b::a:z$.

CA-

CASUS II.

COgnita ratione b ad c, quam habent inter se duæ quantitates z, et y, cognitàque harum differentià a, quantitates invenire.

Si b major sit quàm c, suppositiones erunt

$$\text{I. } b:c::z:y \qquad \text{II. } z-y=a$$
$$3:1::z:y. \qquad z-y=60.$$

Resolutio generalis

$$z=\frac{ab}{b-c}=90; \qquad y=\frac{ac}{b-c}=30.$$

Hinc Canon.

MUltiplica differentiam datam per majorem terminum rationis datæ: productum divide per differentiam terminorum; habebis majorem quantitatem ex quæsitis: unde altera non latebit.

THEOREMA.

UT differentia terminorum rationis datæ ad terminum primum, ita differentia duarum quantitatum ad majorem incognitam.

$$b-c:b::a:z.$$
$$b-c:c::a:y.$$

SCHO-

SCHOLION I.

174. ASsuescant Tyrones æquationum generales formulas saltem simpliciores, per ea, quæ de proportionibus jam tradidi Lib. I. theoremata, in analogias resolvere, a quibus constructionum geometricarum artificium omne pendet, uti alibi accuratiùs erit agendum, ubi etiam æquationum compositarum similem resolutionem docebimus.

SCHOLION II.

ASsuescant etiam, ut aliàs monui, propositam quæstionem a terminis contractis ad abstractos transferre. Exemplo sint hæc duo, quæ subjicio, ænigmata.

Interrogatus Socrates, quota esset hora diei, respondit: horæ a media nocte usque ad hoc instans elapsæ, ad horas residuas usque ad meridiem se habent, ut 2 ad 3: quæritur ergo quota tunc sit hora? Cum horæ a media nocte ad meridiem sint 12, problema propositum huc recidit.

Numerum datum partiri in duas partes, quæ datam habeant proportionem. Consule formulam generalem casus I.

Interrogatus quidam, quota sit hora diei, ita respondit. Dimidiata pars horarum a media nocte usque ad hoc instans elapsarum, addita ad tres quartas horarum futurarum ad sequentem mediam noctem, indicabit numerum horarum,

horarum, quem quæris: quæritur ergo, quota tunc sit hora?

Numerum datum $a = 24$ dividere in partes duas z, & y, ea conditione ut $\frac{1}{2}z + \frac{3}{4}y = z$.

QUÆSTIO XII.

CASUS I.

175. QUantitatem notam a dividere in duas partes z, & y, ita ut primæ z addita quantitate nota d, summa $z+d$ ad y sit ut b ad c.

Suppositiones

I. $z+y=a$ II. $b:c::z+d:y$
$z+y=6.$ $3:1::z+4:y.$

Nempe, cum y sit quarta proportionalis, erit $y=\frac{cz+cd}{b}$ ex secunda suppositione; quia verò ex prima suppositione $z+y=a$, substituendo valorem y, erit $z+\frac{cz+cd}{b}=a$; & multiplicando, & transponendo, & dividendo erit $z=\frac{ab-cd}{b+c}$.

Pari pacto quæres valorem $y=\frac{ac+cd}{b+c}$. Facilè autem intelliges quantitatem ab esse debere

debere majorem quàm cd, propter æquationem $z=\frac{ab-cd}{b+c}$.

Resolutio generalis, & determinata, & hinc Canon.

$z=\frac{ab-cd}{b+c}$; $y=\frac{ac+cd}{b+c}$; $z+d:y::b:c$;
$z=\frac{176}{4}=44$. $y=\frac{64}{4}=16$. $48:16::3:1$.

CASUS II.

QUòd si a sit differentia nota partium z, & y; & b pariter sit major quàm c; z, & y ita reperies.

Suppositiones

I. $z-y=a$ II. $b:c::z+d:y$
$z-y=60.$ $3:1::z+4:y.$

Scilicet ex suppositione secunda, & notissima proportionalium lege erit $y=\frac{cz+cd}{b}$; substitutoque hoc valore in prima suppositione, tum multiplicando, transponendo, ac dividendo erit

Re-

Resolutio generalis, & determinata

$$z=\frac{ab+cd}{b-c};\quad y=\frac{ac+cd}{b-c};\quad z+d:y::b:c;$$

$$z=\frac{184}{2}=92.\ y=\frac{64}{2}=32.\quad 96:32::3:1.$$

CASUS III.

Quòd si $z+y=a$; & $b:c::z-d:y$; cujus expressionis analyticæ sensus perinde est, ac quærere valorem incognitarum z, & y, quarum summa sit æqualis a: prima autem $z-d$ ad y eamdem habeat rationem, quam b ad c. Hæc monui, ut jam imposterum assuescant Tyrones signa pro vocibus usurpare; est enim hæc contractior enunciandi ratio passim adhibita ab Analystis, quæ statim oculis subjicit suppositiones singulas problematis.

Resolutio generalis, & determinata

$$z=\frac{ab+cd}{c+b};\quad y=\frac{ac-cd}{b+c};\quad z-d:y::b:c;$$

$$z=\frac{184}{4}=46.\ y=\frac{56}{4}=14.\quad 42:14::3:1.$$

CASUS IV.

Suppositiones

$$z-y=a;\qquad b:c::z-d:y.$$

Resolutio generalis, & determinata

$$z=\frac{ab-cd}{b-c};\qquad y=\frac{ac-cd}{b-c}.$$

QUÆSTIO XIII.

CASUS I.

176. Si duæ quantitates notæ a, & b minores sint incognitâ z, & duæ aliæ cognitæ g, & p eamdem habeant inter se rationem, ac defectus a vero valore z ita expressi $z-a$, $z-b$; verum valorem z invenire.

Hoc loco monendus est Tyro, ne in ordinanda hac analogia inducatur in errorem, qui terminis rite perceptis facilè vitabitur. Nimirum quantò minor est quantitas a quàm b, tantò præcisè major est defectus a infra z quàm defectus b infra eamdem z. Quare, si $a<b$, & $g>p$, analogia ita erit instituenda.

Suppositiones

I. $a < z$; $b < z$ II. $z - a : z - b :: g : p$
$30 < z; 40 < z$. $z - 30 : z - 40 :: 3 : 2$.

Resolutio generalis, & determinata

$$z = \frac{bg - ap}{g - p} = \frac{120 - 60}{3 - 2} = 60$$
$$60 - 30 : 60 - 40 :: 3 : 2$$
$$30 \quad : \quad 20 \quad :: 3 : 2.$$

Nimirũ ex secunda suppositione multiplicatis extremis, & mediis, oritur æquatio $pz - ap = gz - bg$. In transponendo autem meminisse debes g majorem esse quàm p, ut quantitas z prodeat positiva; atque adeo $gz - pz = bg - ap$; & dividendo $z = \frac{bg - ap}{g - p}$, ut in resolutione.

CASUS II.

Suppositiones

I. $a > z$; $b > z$ II. $a - z : b - z :: g : p$
$140 > z; 60 > z$. $140 - z : 60 - z :: 3 : 1$.

Resolutio generalis, & determinata

$$z = \frac{bg - ap}{g - p} = \frac{180 - 140}{3 - 1} = 20$$
$$a - z : b - z :: g : p$$
$$140 - 20 : 60 - 20 :: 3 : 1.$$

CASUS III.

Suppositiones

I. $a > z$; $b < z$ II. $a - z : z - b :: g : p$
$180 > z; 60 < z$. $180 - z : z - 60 :: 5 : 1$.

Æquationes

$ap - pz = gz - bg$;
& transponendo $gz + pz = ap + bg$.

Resolutio generalis

$$z = \frac{ap - bg}{g + p} = \frac{180 + 300}{6} = 80$$
$$a - z : z - b :: g : p$$
$$100 \quad : \quad 20 \quad :: 5 : 1.$$

CASUS IV.

ET si cognitæ a, & b addantur singulæ quantitati incognitæ z, sitque

Suppositio

$$z + a : z + b :: g : p$$
$$z + 50 : z + 7 :: 4 : 3.$$

Æquationes

$$pz + ap = gz + bg;$$
& transponendo $gz - pz = ap - bg.$

Resolutio generalis

$$z = \frac{ap - bg}{g - p} = \frac{150 - 28}{4 - 3} = 122$$
$$z + a : z + b :: g : p$$
$$172 : 129 :: 4 : 3.$$

Casus V.

Et si cognita a addatur incognitæ z, eidemque detrahatur cognita b, sitque

Suppositio

$$z + a : z - b :: g : p$$
$$z + 5 : z - 8 :: 4 : 3.$$

Æquationes

$$pz + pa = gz - bg;$$
& transponendo $gz - pz = ap + bg.$

Re-

Resolutio generalis

$$z = \frac{ap + bg}{g - p} = \frac{32 + 15}{4 - 3} = 47$$
$$z + a : z - b :: g : p$$
$$52 : 39 :: 4 : 3.$$

Casus VI.

Et si eàdem z additâ cognitæ a, & detractâ ex b, habeatur eadem ratio, ac g ad p:

Suppositio

$$z + a : b - z :: g : p$$
$$z + 5 : 25 - z :: 2 : 3.$$

Æquationes

$$pz + pa = bg - gz;$$
& transponendo $gz + pz = bg - ap.$

Resolutio generalis

$$z = \frac{bg - ap}{g + p} = \frac{50 - 15}{5} = 7$$
$$z + a : b - z :: g : p$$
$$12 : 18 :: 2 : 3.$$

QUÆ-

QUÆSTIO XIV.

CASUS I.

177. Reperire duas quantitates z, & y, quarum summa sit $=a$, & summa certarum partium primæ, & secundæ sit $=b$.

Pono fractionem $\frac{c}{d}$ denominare partes z, & fractionem $\frac{e}{f}$ denominare partes y, quarum summa $=b$.

Suppositiones

$$z+y=a; \qquad \frac{c}{d}z+\frac{e}{f}y=b.$$

Resolutio generalis

$$y=\frac{acf-bdf}{cf-de}, \text{ si } cf>de;$$

$$y=\frac{bdf-acf}{de-cf}, \text{ si } de>cf.$$

Et similiter $z=\frac{ade-bdf}{de-cf}$;

vel $z=\frac{bdf-ade}{cf-de}$.

CASUS II.

Si autem a sit summa $z+y$; b verò differentia certarum partium z, & y:

Suppositiones

$$z+y=a; \qquad \frac{c}{d}z-\frac{e}{f}y=b.$$

Resolutio generalis

$$z=\frac{ade+bdf}{cf+de}; \qquad y=\frac{acf-bdf}{de+cf}.$$

CASUS III.

Si a sit differentia z, & y; b verò summa certarum partium z, & y:

Suppositiones

$$z-y=a; \qquad \frac{c}{d}z+\frac{e}{f}y=b.$$

Resolutio generalis

$$z=\frac{bdf+ade}{cf+de}; \qquad y=\frac{bdf-acf}{cf+de}:$$

erit $bd>ac$.

Casus IV.

Quòd si a sit differentia z, & y; b verò differentia certarum partium z, & y:

Suppositiones

$$z - y = a; \qquad \frac{c}{d}z - \frac{e}{f}y = b.$$

Resolutio generalis

$$z = \frac{ade - bdf}{de - cf}; \qquad y = \frac{acf - bdf}{de - cf};$$
$$de > cf.$$

Casus V.

Suppositiones

$$z - y = a; \qquad \frac{e}{f}y - \frac{c}{d}z = b.$$

Resolutio generalis

$$z = \frac{bdf + ade}{de - cf}; \qquad y = \frac{acf + bdf}{de - cf};$$
$$de > cf.$$

Quæstio XV.

178. Datis a, & b, invenire z, & y tales, ut summa $z + a$, & differentia $y - a$ sint inter se, ut c ad d; summa verò $y + b$, & differentia $z - b$ sint, ut e ad f.

Suppositiones

$$z + a : y - a :: c : d \quad y + b : z - b :: e : f$$
$$z + 15 : y - 15 :: 2 : 1. \quad y + 25 : z - 25 :: 3 : 1.$$

Resolutio generalis

$$y = \frac{ace + ade + bde + bdf}{ce - df}$$
$$y = \frac{90 + 45 + 75 + 25}{6 - 1} = 47$$
$$z = \frac{bce + bcf + acf + adf}{ce - df}$$
$$z = \frac{150 + 50 + 30 + 15}{6 - 1} = 49.$$

Quæstio XVI.

179. Dividere quantitatem a in partes duas z, & y, & eamdem a dividere in alias duas x, & v, ita ut pars major z primæ divisionis, & minor x divisionis secundæ habeant inter se rationem c ad d; pars verò minor y divisionis primæ, & major v secundæ, sint inter se, ut e ad f.

Suppositiones

I. $z+y=a$
$z+y=84.$

II. $x+v=a$
$x+v=84.$

III. $c:d::z:x$
$5:2::z:x.$

IV. $e:f::y:v$
$1:13::y:v.$

Resolutio

Per primam suppositionem $z=a-y$, & per secundam $x=a-v$; per tertiam verò $x=\frac{dz}{c}=a-v$; proinde $dz=ca-cv$, & $z=\frac{ac-cv}{d}=a-y$: ergo $ac-cv=ad-dy$.

Porro per suppositionem quartam $v=\frac{fy}{e}$. Cum verò in anteacta æquatione transponendo sit $cv=ac-ad+dy$, & dividendo $v=\frac{ac-ad+dy}{c}$, erit $\frac{fy}{e}=\frac{ac-ad+dy}{c}$: quare $cfy=ace-ade+dey$; & transponendo, si $cf>de$, erit $cfy-dey=ace-ade$, & $y=\frac{ace-ade}{cf-de}$.

Jam redeundo ad æquationem illam $ac-cv=ad-dy$, aliter transponendo, habebis $dy=ad-ac+cv$, & $y=\frac{ad-ac+cv}{d}$; ex quarta verò supposit. $y=\frac{ev}{f}=\frac{ad-ac+cv}{d}$; & per

& per reductionem $v=\frac{acf-adf}{cf-de}$: hinc $x=a-v=\frac{adf-ade}{cf-de}$;

$$z=a-y=\frac{acf-ace}{cf-de}.$$

Resolutio generalis

$$z=\frac{acf-ace}{cf-de}=\frac{5040}{63}=80$$

$$y=\frac{ace-ade}{cf-de}=\frac{252}{63}=4$$

$$x=\frac{adf-ade}{cf-de}=\frac{2016}{63}=32$$

$$v=\frac{acf-adf}{cf-de}=\frac{3276}{63}=52.$$

QUÆSTIO XVII.

180. Dividere a in partes duas z, & y, aliasque duas x, & v, itemque duas s, & t, ita ut z pars major primæ divisionis, ex x minor secundæ, sint inter se, ut c ad d: pars major secundæ divisionis v ad t minorem tertiæ, ut e ad f: denique pars major tertiæ divisionis s ad y minorem primæ, ut g ad h.

Sup-

Suppositiones

I. $z+y=a=25$
II. $x+v=a=25$
III. $s+t=a=25$
IV. $c:d::z:x$
$3:1::z:x$
V. $e:f::v:t$
$2:1::v:t$
VI. $g:h::s:y$
$4:1::s:y$.

Ex suppositione prima $z=a-y$; ex secunda $x=a-v$; ex tertia $t=a-s$; ex quarta $x=\frac{dz}{c}=a-v$: ergo $dz=ac-cv$, & $z=\frac{ac-cv}{d}=a-y$: ergo $ca-cv=ad-dy$; & transponendo, ac dividendo, $y=\frac{ad-ac+cv}{d}=\frac{hs}{g}$ ex suppositione sexta; & per reductionem $v=\frac{dhs-adg+acg}{cg}$. Jam ex quinta suppositione $t=\frac{fv}{e}=a-s$ ex tertia suppositione; ac proinde $v=\frac{ae-es}{f}=\frac{dhs-adg+acg}{cg}$; & per reductionem $s=\frac{aceg+adgf-acgf}{dfh+cge}$.

In-

Invento valore s, reliquarum incognitarum valores facilè determinabis ex reliquis suppositionibus.
$t=a-s$ ex tertia;
$y=\frac{hs}{g}$ ex sexta;
$z=a-y$ ex prima;
$v=\frac{et}{f}$ ex quinta;
$x=a-v$ ex secunda.

Resolutio generalis

$$z=\frac{acfh-aceh+aceg}{dfh+ceg}=21$$
$$y=\frac{adfh-acfh+aceh}{dfh+ceg}=4$$
$$x=\frac{adfh-adeh+adeg}{dfh+ceg}=7$$
$$v=\frac{adeh-adeg+aceg}{dfh+ceg}=18$$
$$t=\frac{adfh-adfg+acfg}{dfh+ceg}=9$$
$$s=\frac{aceg+adfg-acfg}{dfh+ceg}=16.$$

QUÆSTIO XVIII.

181. Dividere a in tres partes z, y, x, ita ut summa priorum ad tertiam sit, ut c ad d; summa verò postremarum ad primam sit, ut e ad f.

Sup-

Suppositiones

I. $z+y+x=a$

$z+y+x=2$

II. $z+y:x::c:d$

$z+y:x::3:1$

III. $y+x:z::e:f$

$y+x:z::5:1.$

Resolutio universalis

$$z=\frac{acf+adf}{ce+de+cf+df}=2$$

$$y=\frac{ace-adf}{ce+de+cf+df}=7$$

$$x=\frac{ade+adf}{ce+de+cf+df}=3.$$

QUÆSTIO XIX.

182. INvenire z, y, x tales, ut I. differentia primæ, & secundæ ad tertiam sit, ut c ad d; II. differentia secundæ, & tertiæ ad primam, ut e ad f; III. differentia tertiæ, & h ad secundam, ut g ad h.

Suppositiones

I. $z-y:x::c:d$

$z-y:x::1:3$

II. $y-x:z::e:f$

$y-x:z::1:5$

III. $x-h:y::g:h$

$x-4:y::1:4.$

Re-

Resolutio generalis

$$z=\frac{bdfh+bcfh}{dfh-ceg-deh-dfg}=10$$

$$y=\frac{bceh+bdfh}{dfh-ceg-deh-dfg}=8$$

$$x=\frac{bdfh-bdeh}{dfh-ceg-deh-dfg}=6.$$

QUÆSTIO XX.

183. INvenire z, y, x, v tales, ut summa certarum partium primæ, & secundæ, & tertiæ; itemque summæ certarum partium tertiæ, & quartæ, & summæ certarum partium quartæ, & primæ; ac denique summa quantitatum integrarum $z+y+x+v=a$.

Denominando fractiones propositarũ quantitatum ordinatim c, d, e, f, g, h, l, m, habebis sequentes suppositiones.

$$cz+dy=ex+fy=gx+hv=lv+mz$$

$$\tfrac{1}{3}z+\tfrac{1}{4}y=\tfrac{4}{5}x+\tfrac{1}{4}y=\tfrac{1}{5}x+\tfrac{5}{6}v=\tfrac{1}{6}v+\tfrac{2}{3}z$$

$$z+y+x+v=a=238.$$

Resolutio generalis

$z=(adeh+adgl-adel-afgl):$
$(cel+cfh-ceh-cfg-cfl-cgl+dem$
$+deh-del-dgm+dgl+dhm+ehm$
$+fgm-fgl-fhm)=75;$

$y=(acel+aehm-aceh-acfl):$
$(cel+cfg$ &c. $=46;$

$x=$

$x = (acfb + adbm - afbm - acfl)$: $(cel + cfg$ &c. $= 60$;

$v = (adem + afgm - acfg - adgm)$: $(cel + cfg$ &c. $= 57$;

& ſumma omnium $a = 238$.

Scholion.

Has, ſimileſque æquationes ſi attentè mediteris, ac diligenter exerceas, vix erit ulla quæſtio ſimplex, & determinata, utcunque terminorum, & fractionum multitudine impedita, quam explicare non poſſis. Progredior ad quæſtiones planas, quarum quantitates deprimi poſſunt ad lineares.

Quæstio XXI.

Casus I.

184. Cognitâ ſummâ, & plano duarum quantitatum, quantitates invenire.

Ex jacto jam principio ſummam notam voco $2a$, differentiam ignotam $2y$, erit quantitas major $a+y$, minor $a-y$, & utriuſque planum $aa-yy=b$; & tranſponendo, & extrahendo utrinque radicem, $y=\sqrt{aa-b}$.

Suppoſitiones

Major $a+y$, minor $a-y$, planum $aa-yy=b$
$3+y$ $\quad 3-y \quad 9-yy=8$.

Reſolutio generalis.

$$y=\sqrt{aa-b}=\sqrt{9-8}=1$$
$$a+y=4; \qquad a-y=2.$$

Casus II.

Et ſi duarum quantitatum nota ſit differentia $2d$, & planum b, quantitates invenire.

Summam incognitam voco $2z$; tum ex eodem principio major erit $z+d$, minor $z-d$.

Reſolutio generalis.

$$z+d = d+\sqrt{dd+b} = 4$$
$$z+1 = 1+\sqrt{1+8} = 4$$
$$z-d = -d+\sqrt{dd+b} = 2$$
$$z-1 = -1+\sqrt{1+8} = 2.$$

Quæstio XXII.

Casus I.

185. Si duarum quantitatum nota ſit ſumma $2a$, & ratio ſummæ ad planum, ut c ad d, quantitates invenire.

Differentiam ignotam voco $2y$; major erit $a+y$, minor $a-y$, & planum $aa-yy$.

Suppositiones.

$$2a : aa - yy :: c : d$$
$$16 : 64 - yy :: 1 : 3.$$

Resolutio generalis.

$$a + y = a + \sqrt{aac - 2ad} = 12$$
$$a - y = a - \sqrt{aac - 2ad} = 4.$$

CASUS II.

ET si $2a$ sit differentia duarum quantitatum; & differentia ad planum ipsarum sit, ut c ad d, seu 1 ad 6, quantitates invenire. Summam ignotam voco $2z$.

Resolutio generalis.

$$z + a = a + \sqrt{\frac{aac + 2ad}{c}} = 12$$
$$z - a = -a + \sqrt{\frac{aac + 2ad}{c}} = 4.$$

CASUS III.

ET si summa quantitatum incognita $2z$ ad earum planum cognitum p sit, ut c ad d, differentiam incognitam pariter voca $2y$, eritque major $z + y$, minor $z - y$.

Suppositiones.

$$zz - yy = p = 48;$$
$$c : d :: 2z : p$$
$$1 : 3 :: 2z : 48$$

Resolutio generalis.

$$y = \sqrt{\frac{ccp - 4ddp}{4dd}} = \frac{\sqrt{ccp - 4ddp}}{2d}$$
$$z + y = 12; \qquad z - y = 4.$$

CASUS IV.

ET si differentia incognita $2y$ ad planum notum p sit, ut c ad d, vocatâ summâ $2z$, erit quantitas major $z + y$, minor $z - y$, & planum $zz - yy = p$ &c.

QUÆSTIO XXIII.

186. QUantitates notas $a = 8$, & $b = 2$ per tertiam ignotam z multiplicare, ita ut factum primum az sit quadratum, cujus latus, seu radix sit factum secundum bz.

Resolutio generalis.

$$\frac{a}{bb} = z = 2; \quad az = 16, \text{ cujus latus } bz = 4.$$

QUÆSTIO XXIV.

CASUS I.

187. QUantitates invenire, quarum nota eſt ſumma $2a$, & ſumma quadratorum $2b$.

Differentiam ignotam voco $2y$.

Reſolutio generalis.

Major $a+y=a+\sqrt{b-aa}$;

Minor $a-y=a-\sqrt{b-aa}$.

CASUS II.

ET ſi nota ſit differentia $2d$ duarum quantitatum, & ſumma quadratorum $2b$, ut quantitates invenias, ſummam incognitam vocabis $2z$.

Reſolutio generalis.

Major $z+d=d+\sqrt{b-dd}$;

Minor $z-d=-d+\sqrt{b-dd}$.

CASUS III.

ET ſi cognita ſit ſumma quantitatum $2a$, & differentia quadratorum $2b$;

CA-

CASUS IV.

VEl ſi nota ſit differentia duarum quantitatum $2a$, & differentia quadratorum $2b$, quantitates invenire.

QUÆSTIO XXV.

CASUS I.

188. INvenire duas quantitates, quæ ſint inter ſe, ut c ad d, & quarum ſumma ad ſummam quadratorum ſit, ut e ad f.

Si prima quantitas ponatur cz, erit ſecunda dz propter ſuppoſitionem primam. Itaque

Suppoſitiones.

$$c:d::cz:dz$$

$$cz+dz:cczz+ddzz::e:f.$$

CASUS II.

ET ſi duæ quantitates ſint inter ſe, ut c ad d; & differentia $cz-dz$ ad ſummam quadratorum $cczz+ddzz$, ut e ad f;

CASUS III.

VEl ſi duæ quantitates ſint inter ſe, ut c ad d; & differentia quantitatum cz $-d$

$-dz$ ad differentiam quadratorum $cczz-ddzz::e:f$;

Casus IV.

Vel si quantitates sint inter se, ut c ad d; & summa quantitatum ad differentiam quadratorum, ut e ad f;

Casus V.

Aut si quantitates sint inter se, ut c ad d; & quantitas una ad quadratum alterius sit, ut e ad f;

Casus VI.

Aut si quantitates sint, ut c ad d, & $cz:cczz::e:f$;

Casus VII.

Praeterea, si quantitates sint, ut c ad d; & summa quantitatum ad quadratum primae, ut e ad f;

Casus VIII.

Denique, si quantitates $cz:dz::c:d$; & $cz-dz:cczz::e:f$, determinare quantitates.

QUÆ-

Quaestio XXVI.

189. Si notum sit factum duarum quantitatum, & summa quadratorum, quantitates invenire.

Si summam voces $2z$, differentiam $2y$, erit major $z+y$, minor $z-y$.

Suppositiones.

Factum $zz-yy=a=20$;
Summa quadratorũ $2zz+2yy=2b=104$.

Resolutio generalis.

$$y=\sqrt{\frac{b-a}{2}}=\sqrt{16}=4$$

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{2b-2a}=\frac{1}{2}\sqrt{64}=4$$

$$z=\sqrt{\frac{a+b}{2}}=\sqrt{36}=6$$

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{2a+2b}=\frac{1}{2}\sqrt{144}=6$$

$$z+y=10;\quad z-y=2.$$

Quaestio XXVII.

190. Si notum sit factum duarum quantitatum $=a$, & differentia quadratorum $=2b$, quantitates invenire.

Di-

Dicatur ſumma $2z$, & differentia $2y$: erit ergo major $z+y$, & minor $z-y$.

Ex prima ſuppoſitione factum $zz-yy=a$, & $zz=a+yy$; ex ſecunda $4zy$ differentia quadratorum $=2b$, ſive $2zy=b$; jam quadrando utramque æquationem, fiet $z^4-2z^2y^2+y^4=aa$; & $4zzyy=bb$: addendo utramque æquationem fit quadratum perfectum $z^4+2zzyy+y^4=aa+bb$; & extrahendo radicem, erit $zz+yy=\sqrt{aa+bb}$; & tranſponendo, $zz=-yy+\sqrt{aa+bb}=a+yy$ ex prima ſuppoſitione: ergo iterũ tranſponendo, $2yy=-a+\sqrt{aa+bb}$, hoc eſt, $yy=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}$; & $y=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$.

Porro, ſi in æquatione $zz=a+yy$ ſubſtituatur valor y jam repertus, prodibit $z=\sqrt{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$.

Reſolutio generalis.

$$a=20;\ 2b=96.$$

$$z+y=\sqrt{\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}+\sqrt{-\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}=10;$$

$$z-y=\sqrt{\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}-\sqrt{-\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}=2.$$

QUÆSTIO XXVIII.

CASUS I.

191. SI nota ſit ſumma duarum quantitatum $2a=6$, & ſumma plani, & quadratorum utriuſque $b=124$, quantitates invenire.

Cum ſumma ſit $2a$, ſi differentia ignota dicatur $2y$, erit major $a+y$, minor $a-y$:

Planum utriuſque	$aa-yy$
Quadratum majoris	$aa+yy+2ay$
Quadratum minoris	$aa+yy-2ay$
Horum ſumma	$3aa+yy=b$.

Reſolutio generalis.

$$a+y=a+\sqrt{b-3aa}=10$$
$$a-y=a-\sqrt{b-3aa}=2.$$

CASUS II.

COgnità differentià duarum quantitatum $2a=8$, & ſummà plani, & quadratorum utriuſque $b=124$, quantitates invenire.

Summa quantitatum ignota dicatur $2z$.

Resolutio generalis.

$$z+a=a+\sqrt{\frac{b-aa}{3}}=4+\sqrt{\frac{124-16}{3}}=10;$$

$$z-a=-a+\sqrt{\frac{b-aa}{3}}=-4+\sqrt{\frac{124-16}{3}}$$
$=2$.

Casus III.

Si duarum quantitatum nota sit una c, & summa plani, & quadratorum utriusque $=b$, alteram x invenire.

Ex suppositione $cx+cc+xx=b$.

Resolutio generalis.

$$x=-\tfrac{1}{2}c+\sqrt{b-\tfrac{3}{4}cc}.$$

Casus IV.

Cognito plano duarum quantitatum $=a$, & summà plani, & quadratorum $=b$, quantitates invenire.

Vocetur summa quantitatum $2z$, & differentia $2y$.

Suppositiones.

$$zz-yy=a=20;\quad 3zz+yy=b=124.$$

Resolutio generalis.

$z+y=\tfrac{1}{2}\sqrt{a+b}+\tfrac{1}{2}\sqrt{b-3a}=\tfrac{1}{2}\sqrt{144}$
$+\tfrac{1}{2}\sqrt{64}=10;$

$z-y=\tfrac{1}{2}\sqrt{a+b}-\tfrac{1}{2}\sqrt{b-3a}=\tfrac{1}{2}\sqrt{144}$
$-\tfrac{1}{2}\sqrt{64}=2.$

Quæstio XXIX.

192. Cognità summà certarum potentiarum æquè elevatarum duplicis quantitatis, & differentià earumdem potentiarum, quantitates invenire.

Vocetur summa certarum potentiarum $2a$, & differentia earumdem $2d$: erit ergo potentia major $a+d$, minor $a-d$. Quare, si potentia major sit quadratum $=a+d$, quantitas quæsita, sive radix hujus potentiæ est $\sqrt{a+d}$; & quantitas minor, sive radix potentiæ minoris $=\sqrt{a-d}$. Eodem modo, si potentia major fuerit cubus $=a+d$, quantitas quæsita erit $\sqrt[3]{a+d}$, & quantitas minor $=\sqrt[3]{a-d}$. Quod idem valet de aliis potentiis; ac proinde sola extractione radicis respectivæ quæstio resolvitur. Hinc descendit

Series infinita resolutionum generalium.

Suppositiones.

Summa quadratorũ $=2a=104$;
Differentia $=2d=96$;

Prima quantitas $\sqrt{a+d}=\sqrt{100}=10$;

Secunda quantitas $\sqrt{a+d}=\sqrt{4}=2$.

Summa cuborum $2a=1008$;
Differentia $2d=992$;

Prima quantitas $\sqrt[3]{a+d}=\sqrt[3]{1000}=10$;

Secunda quantitas $\sqrt[3]{a-d}=\sqrt[3]{8}=2$ &c.

QUÆSTIO XXX.

193. INvenire duas quantitates, quarum nota sit summa quadratorum $2a$, & ratio plani ad quadratum differentiæ, quæ sit, ut b ad c.

Vocetur summa quantitatum $2z$, & differentia earumdem $2y$; adeoque $z+y$ major, $z-y$ minor.

Suppositiones.

$$2zz+2yy=2a;\quad zz-yy:4yy::b:c.$$

Re-

Resolutio generalis.

$$z+y=\sqrt{\frac{4ab+ac}{4b+2c}}+\sqrt{\frac{ac}{4b+2c}}$$
$$z-y=\sqrt{\frac{4ab+ac}{4b+2c}}-\sqrt{\frac{ac}{4b+2c}}.$$

QUÆSTIO XXXI.

CASUS I.

194. COgnitâ summâ duarum quantitatum $2a$, & summâ cuborum utriusque $2b$, quantitates invenire.

Sit summa quantitatum $2a$: sit differentia $2y$; adeoque major $a+y$, & minor $a-y$: cubetur utraque quantitas &c.

Suppositio.

$$2a^3+6ay^2=2b.$$

Resolutio generalis.

$$a+y=a+\sqrt{\frac{b-a^3}{3a}};\quad a-y=a-\sqrt{\frac{b-a^3}{3a}}.$$

CASUS II.

COgnitâ differentiâ duarum quantitatum $2a$, & differentiâ cuborum utriusque $2b$, quantitates invenire.

CA-

Casus III.

Cognitâ summâ duarum quantitatum $2a$, & differentiâ cuborum utriusque $2b$, quantitates invenire.

Invenies æquationem $y^3 + 3a^2y = b$. Et hæc quidem, ut etiam altera sequentis casus, est æquatio composita, ex aliis principiis alibi resolvenda.

Casus IV.

Si nota sit differentia duarum quantitatum $2a$, & summa cuborum utriusque $= 2b$, quantitates invenire.

Quæstio XXXII.

Casus I.

195. Cognito plano duarum quantitatum b, & summâ cuborum utriusque $2c$, quantitates invenire.

Vocetur summa quantitatum $2z$, & differentia $2y$; eritque major $z+y$, minor $z-y$.

Suppositiones.

$$zz - yy = b; \qquad 2z^3 + 6yyz = 2c$$
$$z^3 + 3yyz = c.$$

Jam

Jam ut possint comparari inter se membra utriusque æquationis, eleventur ad eumdem gradum: quod fiet cubando primam, & quadrando secundam; eritque altera ex æquationibus cubata $z^6 - 3z^4y^2 + 3z^2y^4 - y^6 = b^3$ altera quadrata $z^6 + 6z^4y^2 + 9z^2y^4 = cc$. Subtrahendo autem priorem æquationem a posteriori, erit $9z^4y^2 + 6zzy^4 + y^6 = cc - b^3$, cujus primum membrum continet quadratum perfectum. Et sic quæstionem hanc, uti & sequentem resolves eo artificio, quod traditum est Observatione XV. Parte I.

Casus II.

Cognito plano b duarum quantitatum, & differentiâ $2c$ cuborum utriusque, quantitates invenire.

Quæstio XXXIII.

196. Cognito facto ex summa duarum quantitatum in summam quadratorum utriusque $= 4b$, ad vitandas fractiones; alioque facto ex differentia quantitatum in differentiam quadratorum $= 8c$, quantitates invenire.

Summam quantitatum voco $2z$, differentiam $2y$; eritque major $z+y$, minor $z-y$.

Sup-

Suppositiones.

$$4z^3+4zyy=4b;\quad 8zyy=8c$$
$$z^3+\ zyy=b\ ;\quad zyy=c,$$ quam ex prima ſubtrahendo, prodibit $z^3=b-c$ &c.

QUÆSTIO XXXIV.

197. TRes quantitates invenire, quarum plana ſint cognita, hac lege, ut

Suppoſitiones.

Planum primæ, & ſecundæ per tertiam ſit $=a=35$:
Planum primæ, & tertiæ per ſecundam ſit $=b=32$:
Planum ſecundæ, & tertiæ per primam ſit $=c=27$.

QUÆSTIO XXXV.

INvenire tres quantitates z, y, x tales, ut

Suppoſitiones.

$$zy:z+y::c:d$$
$$zx:z+x::e:f$$
$$yx:y+x::g:h.$$

QUÆSTIO XXXVI.

198. QUantitatem cognitam a dividere in partes tres, quarum duæ primæ ſimul $=b$, & ſumma planorum ex tribus incognitis in totidem cognitas c, d, $e=f$.

Suppoſitiones.

$$z+y+x=a;\ z+y=b;$$
$$cz+dy+ex=f.$$

DEFINITIONES.

199. SI tres quantitates a, b, c tales ſint, ut quadratum aa majoris a æquale ſit utrique ſimul quadrato cæterarum $bb+cc$; dimidium planum bc duarum quantitatum minorum dicitur triangulum rectangulum; & tres quantitates a, b, c ſumuntur ut latera ejuſdem trianguli rectanguli; & majus quidem latus a dicitur hypotenuſa, ſive ſubtenſa; minora verò b, & c dicuntur promiſcuè baſis, & perpendiculum, ſive altitudo trianguli. Ratio denominationum hujuſmodi ex Geometria ducitur. Rem totam oculis ſubjicio.

Latera trianguli rectanguli.

Hypotenusa, sive subtensa $= a = 5$;
Basis $= b = 4$;
Perpendiculum $= c = 3$;
Triangulum $= \frac{1}{2} bc = 6$.

Suppositio.

$$aa = bb + cc;\ 25 = 16 + 9.$$

QUÆSTIO XXXVII.

CASUS I.

200. Cognità hypotenusà, & excessu baseos supra perpendiculum, invenire basim, & perpendiculum.

Hypotenusam voco a, excessum baseos supra perpendiculum voco b, perpendiculum y; adeoque basis erit $y + b$. Porro cum quadratum hypotenusæ sit æquale utrique simul quadrato baseos, & perpendiculi, erit ergo

Suppositio.

$$aa = yy + 2by + bb + yy.$$

Re-

Resolutio generalis.

$$y = -\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}$$
$$y + b = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}.$$

CASUS II.

Cognità hypotenusà a, & summà laterum b, latus utrumque invenire.

Perpendiculum voco y: unde basis erit $b - y$.

Suppositio.

$$aa = 2yy - 2by + bb.$$

Resolutio generalis.

$$y = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}$$
$$b - y = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa - bb}.$$

CASUS III.

Cognita basi $= b$, & summà hypotenusæ, & perpendiculi $= a$, hypotenusam, & perpendiculum invenire.

Subtensam voco z, adeoque perpendiculum $a - z$.

Sup-

Suppositio.

$$zz = bb + aa - 2az + zz.$$

Resolutio generalis.

$$z = \frac{aa+bb}{2a};\quad a - z = \frac{aa-bb}{2a}.$$

CASUS IV.

Cognita basi $= b$, & excessu hypotenusæ z supra perpendiculum $z - a$, invenire hypotenusam, & perpendiculum.

Suppositio.

$$zz = bb + zz - 2az + aa.$$

Resolutio generalis.

$$z = \frac{aa+bb}{2a};\quad z - a = \frac{bb-aa}{2a}.$$

CAPUT II.

201. Persequitur jam Newton, finemque imponit reliquis reductionum Regulis, quarũ institutum est exterminatio quantitatis incognitæ, quæ plurium in utraque æquatione dimensionum existat. Exterminari autem

autem hæc non aliter interdum potest, nisi æquatio utraque in unam transformetur, quæ plurium dimensionum sit, & cujus resolutio pendeat a Regulis, quas ex Newtono alibi exponam, quæque hanc veluti præparationem postulant, ut æquatio finalis evadat ea simplicissima, quæ potest esse, & similis formulis universalibus, quas recensui Prop. III., in quibus unica incognita x, exterminatis reliquis, designat quantitatem quæsitam, quæ per methodos alibi explicandas investigari potest.

Tyronibus autem jam in calculo exercitatis satis perspicua erunt ea, quæ hoc loco subjiciam ex Newtono, etiam nulla interposita commentatione, aut interpretatione.

Exterminatio quantitatis incognitæ, quæ plurium in utraque æquatione dimensionum existat.

202. *Cum in neutra æquatione tollenda quantitas unius tantum dimensionis existit, valor maximæ potestatis ejus in utraque quærendus est. Deinde, si potestates istæ non sint eædem, æquatio potestatis minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem, aut per ejus quadratum, aut cubum &c., ut ea evadat ejusdem potestatis cum æquatione altera. Tum valores illarum potestatum ponendi sunt æquales, & æquatio nova prodibit, ubi maxima potestas, sive dimensio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando, quantitas illa tandem aufe retur.*

 Quem-

Quemadmodum, fit $xx + 5x = 3yy$, & $2xy - 3xx = 4$; *ut* x *tollatur, prima dabit* $xx = -5x + 3yy$, & *secunda* $xx = \frac{2xy - 4}{3}$. *Pono itaque* $3yy - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$; & *sic* x *ad unicam tantùm dimensionem reducitur; adeoque tolli potest per ea, quæ paulo ante ostendi. Scilicet æquationem novissimam debitè reducendo, prodit* $9yy - 15x = 2xy - 4$, *sive* $x = \frac{9yy + 4}{2y + 15}$. *Hunc itaque valorem pro* x *in aliquam ex æquationibus primò propositis (velut in* $xx + 5x = 3yy$) *substituo; & oritur* $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$. *Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per* $4yy + 60y + 225$; & *prodit* $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$, *sive* $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea, si sit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; *ut* y *tollatur, multiplico posteriorem æquationem per* y; & *fit* $y^3 = xxy - xyy - 3y$ *totidem dimensionum, quot prior. Jam ponendo valores ipsius* y^3 *sibimet æquales, habeo* $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, *ubi* y *deprimitur ad duas dimensiones. Per hanc itaque, & simpliciorem ex æquationibus primò propositis* $yy = xx - xy - 3$, *quantitas* y *prorsus tolli potest, insistendo vestigiis prioris exempli.*

Sunt & alii modi, quibus hæc eadem absolvi

solvi possunt; idque sæpenumero contractiùs. Quemadmodum ex $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, & $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; *ut* y *deleatur, extrahe in utraque radicem* y; & *prodibunt* $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & $y = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. *Jam hos ipsius* y *valores ponendo æquales, habebitur* $\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$; & *rejiciendo æqualia* $\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, *restabit* $\frac{xx}{a} = x$, *vel* $xx = ax$, & $x = a$.

Porro, ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ *tollatur* x, *aufer* y *de partibus æquationis primæ; & restat* $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$; & *partibus quadratis, fit* $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$; *tollendoque utrinque* yy, *restat* $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y$. *Quare, cum* $400 - 40y$, & 140 *iisdem quantitatibus æquentur, erit* $400 - 40y = 140$, *sive* $y = 6\frac{1}{2}$. *Et sic opus in ple-*

plerisque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterum, cum quantitas exterminanda multarum dimensionum existit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maximè laboriosus nonnunquam requiritur; sed labor tunc plurimum minuetur per exempla sequentia, tanquam regulas adhibita.

Reg. I.

Ex $axx+bx+c=0$, & $fxx+gx+h=0$, *exterminato* x, *prodit* $\overline{ah-bg-2cf}\times ah : +\overline{bh-cg}\times bf : +\overline{agg+cff}\times c=0$.

Reg. II.

Ex $ax^3+bxx+cx+d=0$, & $fxx+gx+h=0$, *exterminato* x, *prodit* $\overline{ah-bg-2cf}\times ahh : +\overline{bh-cg-2df}\times bfh : +\overline{ch-dg}\times\overline{agg+cff} : +\overline{3agh+bgg+dff}\times df=0$.

Reg. III.

Ex $ax^4+bx^3+cxx+dx+e=0$, & $fxx+gx+h=0$, *exterminato* x, *prodit* $\overline{ah-bg-2cf}\times ah^3 : +\overline{bh-cg-2df}\times bfhh : +\overline{agg+cff}\times\overline{chh-dgh+egg-2efh} : +\overline{3agh+bgg+dff}\times dfh : +\overline{2ahh+3bgh-dfg+eff}\times eff : -\overline{bg-2ah}\times efgg=0$.

Reg. IV.

Ex $ax^3+bxx+cx+d=0$, & $fx^3+gxx+hx+k=0$, *exterminato* x, *prodit* $\overline{ah-bg-2cf}\times\overline{adhh-achk} : +\overline{ak+bh-cg-2df}\times bdfh : -\overline{ak+bh+2cg+3df}\times aakk : +\overline{cdh-ddg-cck+2bdk}\times\overline{agg+cff} : +\overline{3agh+bgg+dff-3afk}\times ddf : -\overline{3ak-bh+cg+df}\times bcfk : +\overline{bk-2dg}\times\overline{bbfk-bbk-3adh-cdf}\times agk=0$.

Verbi gratia, ut ex æquationibus $xx+5x-3yy=0$, & $3xx-2xy+4=0$ *exterminetur* x, *in regulam primam pro* a, b, c; f, g, & h *respectivè substituo* 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$, & 4; & *signis* + & − *probè observatis, oritur* $\overline{4+10y+18yy}\times 4 : +\overline{20-6y^3}\times 15 : +\overline{4yy-27yy}\times -3yy=0$, *sive* $16+40y+72yy+300-90y^3+69y^4=0$.

Simili ratione, ut y *deleatur ex æquationibus* $y^3-xyy-3x=0$, & $yy+xy-xx$

+

$+3=0$, *in regulam secundam pro* a, b, c, d; f, g, h, & x *substituo* $1, -x, 0, -3x; 1, x, -xx+3$, & y *respectivè*, *proditque* $\overline{3-xx+xx}\times\overline{9-6xx+x^4}:\overline{-3x+x^3+6x}\times\overline{-3x+x^3}:+3xx\times xx:+\overline{9x-3x^3-x^3-3x}\times-3x=0$; *tum delendo superflua*, & *multiplicando*, *fit* $27-18xx+3x^4, -9xx+x^6, +3x^4-18x^2+12x^4=0$; & *ordinando* $x^6+18x^4-45xx+27=0$.

Hactenus de unica incognita quantitate e duabus æquationibus tollenda. Quod si plures e pluribus tollendæ sunt, opus per gradus peragetur. Ex æquationibus $ax=yz$, $x+y=z$, & $5x=y+3z$, *si quantitas* y *elicienda sit, imprimis tolle alteram quantitatum* x *aut* z, *puta*, x, *substituendo pro ea valorem ejus* $\frac{yz}{a}$ (*per æquationem primam inventum*) *in æquationem secundam, ac tertiam: quo pacto obtinebuntur* $\frac{yz}{a}+y=z$, & $\frac{5yz}{a}=y+3z$: *e quibus deinde tolle* z, *ut supra*.

De modo tollendi quantitates quotcunque surdas ex æquationibus.

203. **H***Uc referre licet quantitatum surdarum exterminationem, fingendo eas litteris quibuslibet æquales. Quemadmodum, si sit* $\sqrt{ay}-\sqrt{aa-ay}=2a+\sqrt{3:ayy}$, *scribendo* t *pro* $\sqrt{ay}$, v *pro* $\sqrt{aa-ay}$, & x *pro* $\sqrt{3:ayy}$, *habebuntur æquationes* $t-v=2a+x$, $tt=ay$, $vv=aa-ay$, & $x^3=ayy$; *ex quibus tollendo gradatim* t, v, & x, *resultabit tandem æquatio libera ab omni asymmetria*.

Quomodo quæstio aliqua ad æquationem redigatur.

204. **P***Ostquam Tyro in æquationibus pro arbitrio transformandis, & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit, ut ingenii vires in quæstionibus ad æquationem redigendis tentet. Proposita autem aliqua quæstione, Artificis ingenium in eo præsertim requiritur, ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus designet; ad quod faciendum perpendet imprimis, an propositiones, sive sententiæ, quibus enunciatur sint omnes aptæ, quæ terminis algebraicis designari possint, haud secus, quàm conceptus nostri characteribus græcis, vel latinis. Et si ita (ut solet in quæstionibus, quæ circa numeros, vel abstractas quantitates versantur) tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, si opus fuerit, imponat, & sensum quæstionis sermone, ut ita loquar, analytico designet; conditiones ejus ad algebraicos terminos sic translatæ tot dabunt æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt.*

Quemadmodum, si quærantur tres numeri continuè proportionales, quorum summa sit 20, & *qua-*

quadratorum summa 140: *positis* x, y *&* z *nominibus numerorum trium quæsitorum, quæstio e latinis litteris in algebraicas vertetur, ut sequitur.*

Quæstio Latinè enunciata.	*Eadem Algebraicè.*
Quæruntur tres numeri his conditionibus,	$x.y.z?$
Ut sint continuè proportionales:	$x.y::y.z.$ *sive* $xz = yy$
Ut omnium summa sit 20;	$x + y + z = 20$
Et ut quadratorum summa sit 140.	$xx + yy + zz = 140.$

Atque ita quæstio deducitur ad æquationes $xz = yy$, $x + y + z = 20$, *&* $xx + yy + zz = 140$, *quarum ope* x, y *&* z *per regulas supra traditas investigandi sunt.*

Cæterùm notandum est, solutiones quæstionum eò magis expeditas, & artificiosas ut plurimùm evadere, quò pauciores incognitæ quantitates sub initio ponuntur. Sic in hac quæstione posito x *pro primo numero, &* y *pro secundo, erit* $\frac{yy}{x}$ *tertius continuè proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero, quæstionem ad æquationes sic reduco.*

Quæ-

Quæstio Latinè enunciata.	*Eadem Algebraicè.*
Quæruntur tres numeri continuè proportionales,	$x.\ y.\ \frac{yy}{x}?$
Quorum summa sit 20,	$x + y + \frac{yy}{y} = 20$
Et quadratorum summa 140.	$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140.$

Habentur itaque æquationes $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, *&* $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$, *quarum reductione* x *&* y *determinandi sunt.*

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotannis adauget, demptis 100 *lib., quas annuatim impendit in familiam; & post tres annos fit duplo ditior: quæruntur nummi?*

Ad hoc autem resolvendum, sciendum est, quòd plures latent propositiones, quæ omnes sic eruuntur, & enunciantur.

Mercator habet nummos quosdam, (x) *ex quibus anno primo expendit* 100, $(x - 100)$ *& reliquum adauget triente;* $(x - 100 + \frac{x - 100}{3}$, *sive* $\frac{4x - 400}{3})$ *annoque secundo expendit* 100,

$(\frac{4x}{}$

($\frac{4x-400}{3}-100$, *sive* $\frac{4x-700}{3}$) *& reliquum adauget triente;* ($\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$, *sive* $\frac{16x-2800}{9}$) *& sic anno tertio expendit* 100, ($\frac{16x-2800}{9}-100$, *sive* $\frac{16x-3700}{9}$) *& reliquo trientem similiter lucratus est,* ($\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$, *sive* $\frac{64x-14800}{27}$) *fitque duplo ditior, quàm sub initio* ($\frac{64x-14800}{27}=2x$).

Ty-

Typus totius resolutionis Algebraicæ.

x

$x-100$

$x-100+\frac{x-100}{3}$, *sive* $\frac{4x-400}{3}$

$\frac{4x-400}{3}-100$, *sive* $\frac{4x-700}{3}$

$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$, *sive* $\frac{16x-2800}{9}$

$\frac{16x-2800}{9}-100$, *sive* $\frac{16x-3700}{9}$

$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$, *sive* $\frac{64x-14800}{27}$

$\frac{64x-14800}{27}=2x$

Quæstio itaque ad æquationem $\frac{64x-14800}{27}=2x$ *redigitur; cujus reductione eruendus est* x. *Nempe, duc eam in* 27, *& fit* $64x-14800=54x$; *subduc* $54x$, *& restat* $10x-14800=0$, *seu* $10x=14800$; *& dividendo per* 10, *fit* $x=1480$. *Quare* 1480 *lib. sunt nummi sub initio, ut & lucrum.*

Vides itaque, quòd ad solutiones quæstionum, quæ circa numeros, vel abstractas quantitatum relationes solummodo versantur, nihil aliud fere requiritur, quàm ut e sermone latino, vel alio quovis, in quo problema proponitur, trans-

translatio fiat in sermonem (si ita loquar) algebraicum, hoc est, in characteres, qui apti sunt, ut nostros, de quantitatum relationibus conceptus designent. Nonnunquam verò potest accidere, quòd sermo, quocum status quæstionis exprimitur, ineptus videatur, qui in algebraicum possit verti; sed paucis mutationibus adhibitis, & ad sensum potius, quàm verborum sonos attendendo, versio reddetur facilis. Sic enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata: quæ, ubi obvenerint, translatio ex unis in alias non verbo tenus instituenda est, sed ex sensu determinanda. Cæterùm, ut hujusmodi problemata hac methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam, & illustrem; & cum Artes exemplis faciliùs, quàm præceptis addiscantur, placuit sequentium problematum solutiones adjungere.

Ex sexdecim arithmeticis problematis a Newtono propositis quatuor jam nobis supersunt exponenda, quæ in hunc locum contulimus: quippe horum resolutio ab hisce ultimis reductionum Regulis immediatè dependet.

PROBLEMA LXXVII.

205. *Invenire tres numeros continuè proportionales, quorum summa sit 20, & quadratorum summa 140.*

Pone numerorum primum x, *& secundum* y; *eritque tertius* $\frac{yy}{x}$; *adeoque* $x + y + \frac{yy}{x}$ $= 20$,

$= 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$; & *per reductionem* $xx \begin{smallmatrix} +y \\ -20 \end{smallmatrix} x + yy = 0$, & $x^4 \begin{smallmatrix} +yy \\ -140 \end{smallmatrix} xx + y^4 = 0$. *Jam, ut extermінetur* x, *pro* a, b, c, d, e, f, g, & h *in Reg.* 3. *substitue respectivè* 1, 0, $yy - 140$, 0, y^4, 1, $y - 20$, & yy; & *emerget* $\overline{-yy + 280} \times y^6 : \overline{+2yy - 40y + 260} \times \overline{260y^4 - 40y^5} : + 3y^4 \times y^4 : -2yy \times \overline{y^6 - 40y^5 + 400y^4} : = 0$; & *per multiplicationem*, $1600y^6 - 20800y^5 - 67600 y^4 = 0$; *ac reducendo*, $4yy - 52y + 169 = 0$; *sive (radice extracta)* $2y - 13 = 0$, *seu* $y = 6\frac{1}{2}$. *Id quod etiam breviùs alia methodo, sed minùs obvia supra inventum est. Porro, ut inveniatur* x, *substitue* $6\frac{1}{2}$ *pro* y *in æquatione* $xx \begin{smallmatrix} +y \\ -20 \end{smallmatrix} x + yy = 0$; & *exsurget* $xx - 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4} = 0$, *seu* $xx = 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4}$; & *extracta radice*, $x = 6\frac{3}{4} +$, *vel* $- \surd 3\frac{5}{16}$. *Nempe* $6\frac{3}{4} + \surd 3\frac{5}{16}$ *est maximus quæsitorum trium numerorum, &* $6\frac{3}{4} - \surd 3\frac{5}{16}$ *minimus; nam* x *alterutrum extremorum numerorum ambiguè designat; indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter potest esse* x, *existente altero* $\frac{yy}{x}$.

Aliter. Positis numeris x, y, & $\frac{yy}{x}$, *ut ante, erit* $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, *seu* $xx = \frac{20}{-y}x - yy$;

& *extracta radice*, $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ *primus numerus: hunc*, & y *aufer de* 20, & *restat* $\frac{yy}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ *tertius numerus. Estque summa quadratorum a tribus hisce numeris* $400 - 40y$; *adeoque* $400 - 40y = 140$, *sive* $y = 6\frac{1}{2}$. *Invento medio numero* $6\frac{1}{2}$, *substitue eum pro* y *in primo ac tertio numero supra invento*; & *evadet primus* $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$, *ac tertius* $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$, *ut ante.*

PROBLEMA LXXVIII.

206. *Invenire quatuor numeros continuè proportionales, quorum duo medii simul constituant* 12, & *duo extremi* 20.

Sit x *secundus numerus*; & *erit* $12 - x$ *tertius*, $\frac{xx}{12 - x}$ *primus*, & $\frac{144 - 24x + xx}{x}$ *quartus*; *adeoque* $\frac{xx}{12 - x} + \frac{144 - 24x + xx}{x} = 20$; & *per reductionem* $xx = 12x - 30\frac{6}{7}$, *seu* $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{7}}$. *Quo invento cæteri numeri e superioribus dantur.*

PRO-

PROBLEMA LXXIX.

207. *Invenire quatuor numeros continuè proportionales, quorum datur summa* a, & *summa quadratorum* b.

Etsi desideratas quantitates ut plurimùm immediatè quærere solemus, siquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc est, quæ conditionibus omnino similibus præditæ sunt, (ut hìc duo medii, & *duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præstat alias quantitates non ambiguas quærere, per quas hæ determinantur, quemadmodum harum summam, vel differentiam, vel rectangulum. Ponamus ergo summam duorum mediorum numerorum esse* s, & *rectangulum* r; & *erit summa extremorum* $a - s$, & *rectangulum etiam* r *propter proportionalitatem. Jam, ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone* x *primum*, & y *secundum*; *eritque* $s - y$ *tertius*, & $a - s - x$ *quartus*; & *rectangulum sub mediis* $sy - yy = r$; *indeque medii* $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$, & $s - y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$. *Item rectangulum sub extremis* $ax - sx - xx = r$; *indeque extremi* $x = \frac{a - s}{2} + \sqrt{\frac{ss - 2as + aa}{4} - r}$, & $a - s - x = \frac{a - s}{2} - \sqrt{\frac{ss - 2as + aa}{4} - r}$.

Summa quadratorum ex hisce quatuor numeris est $2ss - 2as + aa - 4r = b$; *ergo* $r = \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}b$; *quo substituto pro* r, *prodeunt quatuor numeri, ut sequitur.*

 Duo

Duo medii $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}; \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}. \end{array}\right.$

Duo extremi $\left\{\begin{array}{l} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}; \\ \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}. \end{array}\right.$

Restat tamen etiamnum inquirendus valor ipsius s. *Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hisce substitue*

$$\frac{1}{2}s + p, \qquad \frac{a-s}{2} + q.$$

&

$$\frac{1}{2}s - p, \qquad \frac{a-s}{2} - q.$$

Et pone rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertii, siquidem hæc problematis conditio nondum impleatur; eritque $\frac{as - ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa - ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. *Pone etiam rectangulum sub primo & tertio æquale quadrato secundi; & erit* $\frac{as - ss}{4} + \frac{1}{2}qs - \frac{pa + ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. *Harum æquationum priorem aufer e posteriori; & restabit* $qs - pa + ps = 2ps$, *seu* $qs = pa + ps$. *Restitue jam* $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ *in locum* p, *&* $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$ *in locum* q; *& habebitur* $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = \overline{a+s} \times \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$; *& quadrando,* $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, *seu* $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$; *quo invento dantur quatuor numeri quæsiti e superioribus.*

PROBLEMA LXXX.

208. *Si pensio annua librarum* a *per quinque annos proximè sequentes solvenda, ematur paratà pecunià* c: *quæritur quantì æstimanda sit usura usuræ centum librarum per annum?*

Pone $1 - x$ *usuram usuræ pecuniæ* x *in anno, hoc est, quòd pecunia* 1 *post annum solvenda valeat* x *paratæ pecuniæ; & per analogiam pecunia* a *post annum solvenda valebit* ax *paratæ pecuniæ, post duos annos* axx, *post tres* ax^3, *post quatuor* ax^4, *& post quinque* ax^5. *Adde jam hos quinque terminos; & erit* $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, *seu* $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$ *æquatio quinque dimensionum, cujus ope, cum* x *per* (†) *regulas post docendas inventum*

(†) Nempe inveniendo figuras primas radicis per constructionem quamvis mechanicam, & reliquas per methodum Vietæ.

tum fuerit, pone x. 1 :: 100. y; *&* *erit* y — 100 *usura usuræ centum librarum per annum.*

Atque has in quæstionibus, ubi solæ quantitatum proportiones absque positionibus linearum considerandæ veniunt, instantias dedisse sufficiat. Pergamus jam ad Problematum Geometricorum solutiones.